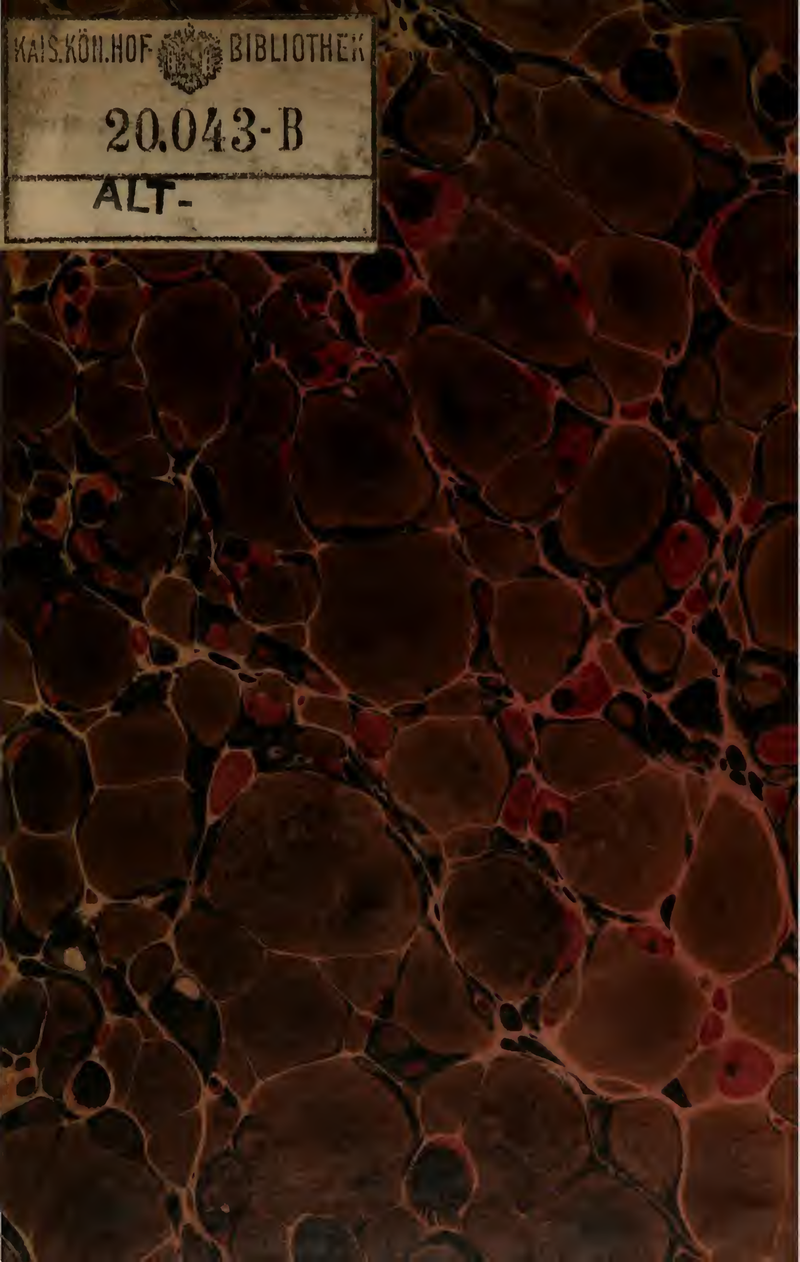
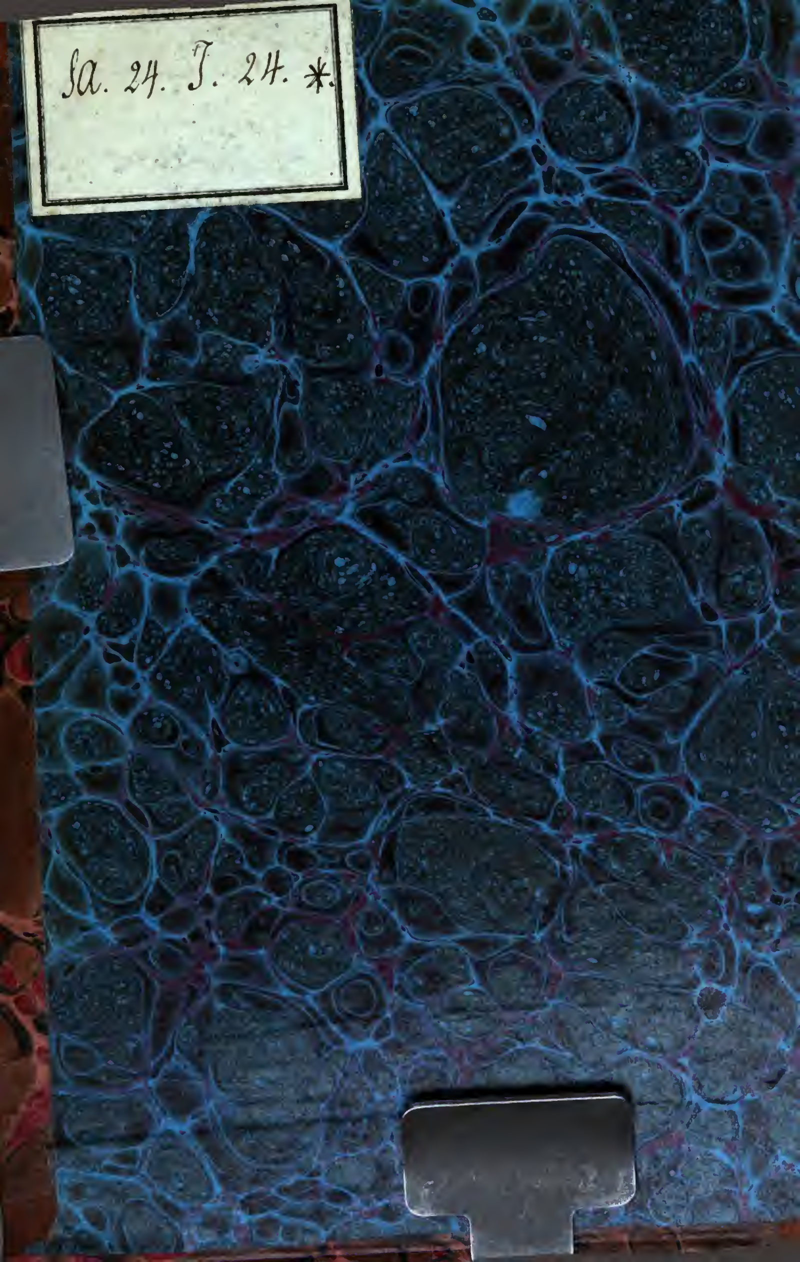
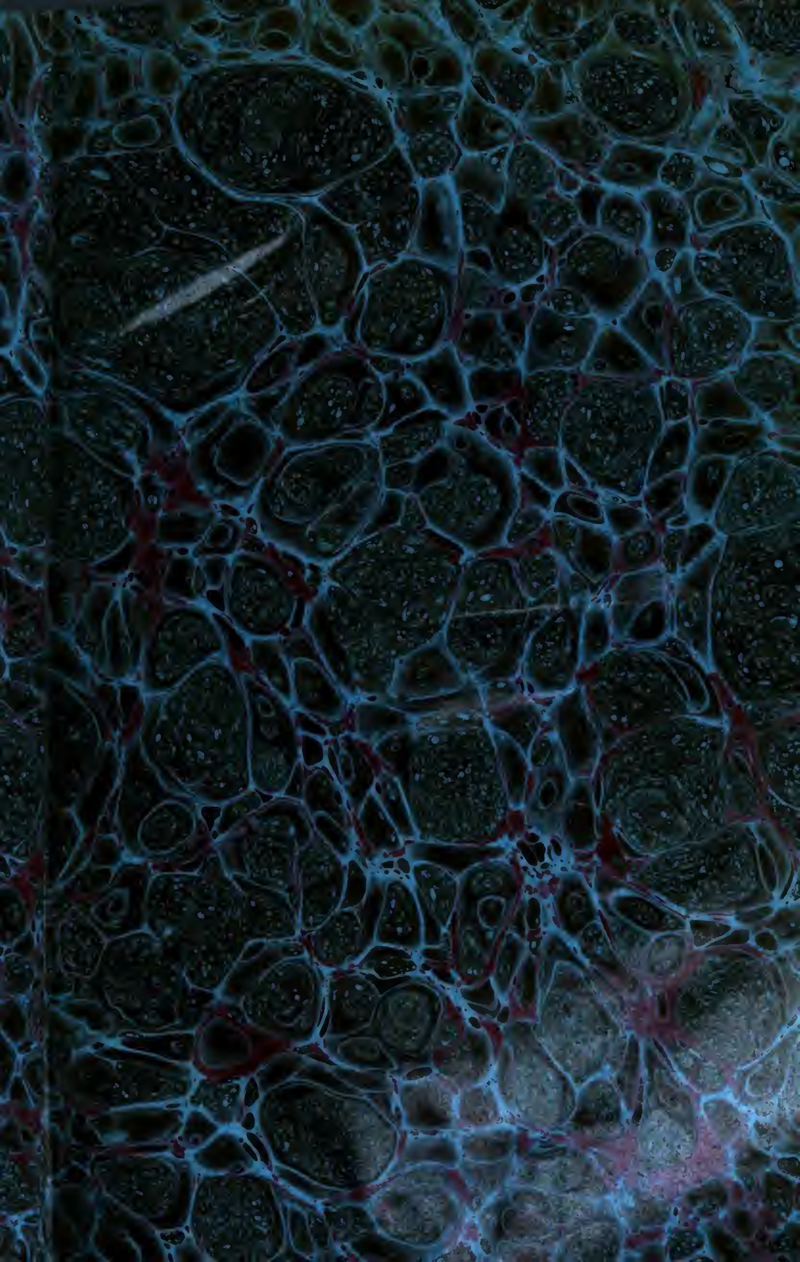


KAIS.KÖN.HOF BIBLIOTHEK
20.043-B
ALT-


Sa. 24. T. 24. *.






Digitized by Google

TRAITÉ
DE CINÉMATIQUE

Imprimerie de GUSTAVE GRATIOT, 11, rue de la Monnaie.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE

(MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES,

AU POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE)

OU

THÉORIE DES MÉCANISMES

PAR

CH. LABOULAYE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE-INDUSTRIELLE

DE L. MATHIAS (AUGUSTIN)

QUAI MALAQUAIS, 15

—

1849

PRÉFACE.

Le bon accueil fait à quelques essais que nous avons tentés pour établir nettement les limites et l'importance de la Cinématique, nous a fait un devoir de rédiger le traité dont nous publions la première partie. Nous regrettons vivement de n'avoir pu disposer pour la rédaction de cet ouvrage que de quelques moments dérobés aux affaires, et surtout qu'un enseignement préalable ne nous ait pas permis de donner toute la perfection désirable aux détails d'un livre destiné à l'enseignement. Tel qu'il est cependant, nous espérons qu'il sera utile, et pourra être consulté avec fruit par les élèves des écoles industrielles et les auditeurs des cours de Cinématique qui seront certainement professés un jour dans les Facultés et au Conservatoire des Arts et Métiers; s'il est un

enseignement indispensable dans ce dernier établissement, qui est avant tout un musée de machines, c'est sans contredit un cours comprenant la théorie des mécanismes.

Lorsque la seconde partie de notre ouvrage aura paru, il renfermera toutes les notions nécessaires à l'intelligence des mécanismes les plus compliqués. Toutefois, pour passer de la théorie à la pratique de la construction des machines, il faudrait plus que la vue des croquis répandus dans le texte. Un atlas qui comprendrait les dessins exacts des divers organes des machines, des exemples multipliés de leurs diverses combinaisons, serait d'une extrême utilité. Un ingénieur bien connu a réuni depuis longtemps les matériaux de ce travail, nous voulons parler de M. Saladin de Mulhouse. Espérons qu'il publiera bientôt son Atlas de Cinématique; nous pouvons lui assurer qu'il rendra encore par là un nouveau et important service à l'industrie française qui lui doit déjà beaucoup.

INTRODUCTION.

La mécanique est généralement définie : *la science du mouvement et des causes du mouvement*. Fondée sur la notion du mouvement, aussi simple, aussi claire pour notre esprit que celle de la grandeur sur laquelle reposent les sciences de calcul, et celle de l'étendue figurée base de la géométrie; s'appliquant également à tous les corps indépendamment de leur nature propre, la mécanique pure dite souvent mécanique rationnelle, est une des trois sciences mathématiques, c'est-à-dire sciences par excellence. C'est parce que ces sciences reposent sur des notions parfaitement claires dans notre esprit, qu'un phénomène est expliqué pour nous quand il est entièrement soumis à l'une d'elles. Ainsi le son qui frappe notre oreille est un phénomène obscur pour nous tant qu'il ne nous représente qu'une sensation perçue; il est expliqué, lorsqu'il est soumis aux lois de la mécanique, lorsque l'on démontre qu'il est causé par des vibrations d'un corps, communiqué au tympan de l'oreille par les

ondulations de l'air en contact avec ce corps, et qu'on a établi la loi de leur propagation.

La mécanique, d'après sa définition même, peut se diviser en deux parties : l'une qui étudie les causes du mouvement, l'autre le mouvement en lui-même. La première partie est la mécanique proprement dite, qui remontant des mouvements aux forces qui les produisent, traite de la grandeur de ces forces, des effets obtenus par leur action sur les corps, établit, en un mot, les *lois générales du mouvement* d'après lesquelles des mouvements étant connus, on calcule les forces capables de les produire, ou au contraire on détermine les mouvements quand on connaît les forces. La seconde partie est la Cinématique (du grec κινημα, *mouvement*) qui s'occupe surtout des mouvements quant aux directions et aux vitesses sans remonter aux causes du mouvement, laissant à la mécanique proprement dite ce qui a rapport aux grandeurs des forces qui les produisent. La Cinématique est donc de sa nature une science géométrique, tandis que la mécanique, qui traite de quantités, est essentiellement algébrique; et comme, en réalité, ce ne sont que des divisions d'une même science, chacune d'elles est l'étude des phénomènes produits par les grandeurs appelées forces, l'une au point de vue du *nombre*, c'est-à-dire surtout à l'aide du calcul, l'autre au point de vue de la *forme*, c'est-à-dire naturellement avec le secours de la géométrie.

Pour bien comprendre toute l'importance de l'étude de la troisième science mathématique à l'aide des deux autres, il faut remonter à l'admirable conception du

grand Descartes, sur laquelle il fonda la géométrie analytique, établit un rapport intime entre les sciences du calcul et celles de l'étendue, entre les deux premières sciences mathématiques. La grandeur géométrique, considérée jusqu'à lui au point de vue de la forme, il l'envisagea au point de vue du nombre par lequel il montra qu'on pouvait la représenter, il indiqua comment les relations de quantité pouvaient être substituées à des relations de qualité. Ce fut grâce à cette vue féconde que tous les progrès des sciences de calcul vinrent s'appliquer aux recherches de la géométrie, et donner à cette science une impulsion admirable.

Sans vouloir insister sur une conception étrangère à notre sujet, la beauté en est si grande, et les applications s'en rencontreront si souvent dans ce traité que nous croyons devoir en rappeler le principe fondamental.

Soit un cercle du rayon a par le centre duquel on a mené deux lignes à angle droit ox, oy, divisées à l'infini en fractions de l'unité de longueur. D'un point A quelconque de la circonférence de ce cercle, abaissons sur ces lignes deux perpendiculaires; appelons x le nombre de divisions intercepté à partir de o sur ox (longueur égale à celle de l'une des perpendiculaires), et y le nombre de ces divisions sur l'autre axe, on aura évidemment l'équation $x^2+y^2=a^2$, qui s'appliquera à tous les points de la circonférence du cercle, et ne s'appliquera à aucun autre point du plan,

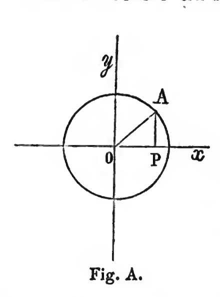


Fig. A.

de telle sorte qu'elle représentera ce cercle aussi bien que le tracé lui-même. Il n'est pas besoin de dire qu'une semblable transformation, permettant d'appliquer le calcul à la recherche de toutes les propriétés d'une courbe, sera d'une grande utilité; mais la proposition réciproque est également vraie. Ainsi, pour l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, on comprendra infiniment mieux les relations qui existent entre les deux variables, en sachant qu'elle représente un cercle, qu'en ne l'envisageant que sous sa forme purement algébrique.

Prenons un exemple encore plus simple :

Pour une droite passant par le point o, on aurait de même pour le rapport constant de deux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite sur deux axes ox, oy, $\frac{y}{x} = a$; le rapport constant entre deux quantités serait ainsi représenté par une ligne droite, comme la valeur constante de la somme de deux carrés par un cercle.

Ainsi donc, grâce au génie de Descartes, la science des grandeurs et la science de l'étendue étant venues se confondre et se prêter un mutuel appui, une loi peut se traduire par une courbe, ou réciproquement une courbe représenter une relation entre des quantités.

Ce qui a lieu pour la géométrie et le calcul doit évidemment avoir lieu également pour la mécanique, et cette science s'est singulièrement développée par une étude faite au point de vue de chacune des deux autres sciences fondamentales dont nous venons de parler; dans ce cas encore, certains théorèmes de celles-ci ont pu être traduits en théorèmes de mécanique et four-

nir des aperçus nouveaux, de même qu'inversement la notion de mouvement sert dans la géométrie à faire comprendre la génération de certaines surfaces et conduit à en découvrir certaines propriétés.

Sans nous arrêter davantage à des idées purement spéculatives, nous considérerons comme bien établi que la science mécanique doit être étudiée à l'aide des deux autres sciences fondamentales : l'étude géométrique des mouvements, l'application plus directe de la géométrie, constituant la partie de la science que nous appellerons la Cinématique.

Disons de suite que dans le cas le plus général cette science existe déjà; les relations des forces entre elles étant, dans la mécanique rationnelle, établies par des équations dans lesquelles entrent les positions variables des divers points; ces équations traduites à l'aide des méthodes de la géométrie analytique fournissent les trajectoires suivies par les corps, les formes géométriques du mouvement.

La science est donc complète à cet égard, au moins quand il s'agit de corps libres; car quand on passe à une des plus importantes parties de la mécanique, à son application aux machines, c'est-à-dire à des corps gênés par des liaisons, des guides divers, les équations du mouvement ne peuvent plus comprendre utilement toutes les relations qui existent entre les divers éléments de systèmes aussi complexes, elles ne s'établissent plus qu'entre les résultats des actions des forces sous l'influence des liaisons du système qu'on ne pourrait introduire dans le calcul qu'à l'aide de complications ex-

trêmes et le plus souvent sans en tirer aucune utilité.

La traduction géométrique des équations qui suffisent au calcul des effets des machines, et sur lesquelles repose la mécanique appliquée aux machines, ne représentant plus les trajectoires, les mouvements des divers points du système, c'est à la Cinématique à combler la lacune qui en résulte; car tandis que la complication des mouvements qu'il est nécessaire d'obtenir pour les besoins des arts, rendrait peu utile leur étude à l'aide des ressources du calcul, par voie analytique, au contraire, au moyen de considérations géométriques, par voie synthétique, la détermination des divers mouvements, des tracés des différentes pièces d'après la nature de leur mouvement devient relativement facile et en même temps bien utile puisqu'elle fournit immédiatement les règles de la pratique.

On voit que cette science, que l'on peut considérer comme une seconde partie de la mécanique appliquée aux machines, en la limitant à la partie qui ne peut trouver sa place dans les traités de mécanique analytique, à l'étude des mouvements divers qui peuvent prendre naissance dans les machines et des moyens de les obtenir, peut enfin être définie quand on a égard à son emploi en disant que *la Cinématique a pour objet l'étude, au point de vue géométrique, des systèmes à l'aide desquels on peut produire, transmettre et modifier un mouvement donné.* Cette science est donc la véritable science du mécanicien, car elle embrasse tous les problèmes que se propose l'industrie manufacturière en construisant des machines.

Si la lacune que laisse encore la Cinématique dans l'édifice scientifique est facilement appréciable, son importance se fait encore bien plus sentir quand on se place au point de vue pratique, quand on passe de la science à l'application.

Tous les traités de mécanique industrielle parus jusqu'ici traitent de la mécanique dynamique, et surtout des moyens de communiquer le plus avantageusement à un récepteur le travail engendré par les agents physiques, de diminuer les résistances qui s'opposent au mouvement, etc. Cet enseignement, le premier et le plus indispensable de tous, est néanmoins bien insuffisant pour l'étude des machines proprement dites, et en arrivant dans les ateliers après avoir acquis les connaissances théoriques que l'on puise dans les cours les plus complets de mécanique, on est étonné de la difficulté qu'on rencontre à comprendre le mode d'action des nombreuses machines-opératrices qui vous entourent.

Entrez dans une filature, par exemple : la roue hydraulique qui fait mouvoir les métiers est-elle établie dans les meilleures conditions possibles? Travaille-t-elle de manière à donner le maximum d'effet utile? Ce sont des questions que résoudra la mécanique industrielle telle qu'on l'enseigne. Mais dans la filature proprement dite, aucun principe ne guide plus pour juger le travail des machines compliquées qui convertissent en tissu le duvet de coton; et, comme toutes les fois qu'une science est à faire, la pratique peut seule servir de guide.

Il n'est pas douteux cependant, que les habiles constructeurs de ces délicates machines n'aient des théories

positives pour les guider, et entre deux moyens d'atteindre un même but, ne sachent fort bien choisir le meilleur. C'est cette science, celle du mécanicien, dont Vaucanson, Jacquart, Arkwright, Watt, etc., ont fait de si belles applications, qu'il importe de formuler en corps de doctrine. On pourra dès lors combler une lacune bien fâcheuse dans l'enseignement de la mécanique appliquée, qui néglige aujourd'hui toutes les ingénieuses inventions, toutes les découvertes accomplies chaque jour dans les diverses branches du travail industriel.

Nous le répéterons donc encore une fois pour rendre parfaitement claire une notion fondamentale : il y a deux parties entièrement distinctes dans la mécanique appliquée aux machines. La première qui traite du meilleur emploi possible de la force motrice, du maximum d'effet utile, de l'évaluation des résistances, constitue la mécanique que nous appellerons *dynamique;* elle a été admirablement résumée dans le cours de M. Poncelet, le principal créateur de la mécanique appliquée aux machines. La seconde partie traite des directions et des vitesses des mouvements qui s'engendrent les uns par les autres, c'est celle que nous appellerons la mécanique *géométrique* ou la *Cinématique;* celle qui jusqu'ici n'est pas entrée dans l'enseignement et que nous tenterons de formuler dans ce traité. Autrefois les corps savants, l'ancienne Académie des sciences, par exemple, se plaçaient toujours au point de vue de cette science : Lahire, Deparcieux, Vaucanson, etc., ont toujours dirigé leurs travaux dans cette direction

que les grands progrès du calcul de l'effet des machines n'eussent pas dû faire abandonner, car il s'agit de deux parties également utiles d'une même science.

C'est donc bien à tort qu'aujourd'hui cette partie de la mécanique est négligée, et l'on ne saurait contester la haute importance non seulement pratique, mais encore intellectuelle de son étude. Chaque jour, par exemple, on entend vanter avec juste raison la sublime invention de Jacquart, mais tous ses admirateurs ont-ils bien apprécié le principe vraiment remarquable sur lequel elle repose? Ne doit-il pas y avoir une idée bonne à étudier sous tous les rapports dans une invention citée par tout le monde comme une œuvre de génie?

Le besoin de compléter la science mécanique ainsi que nous l'indiquons, a été senti par nombre de savants. Carnot, notamment, qui a attaché son nom à une des plus belles théories de la mécanique appliquée aux machines, a parlé plusieurs fois d'un travail dont il sentait toute la nécessité.

« L'objet d'une machine, dit-il, dans son rapport sur « le traité des machines de M. Hachette (1811), est de « modifier l'action d'un moteur donné suivant le but « qu'on se propose. Cette machine peut modifier l'ac- « tion du moteur, ou relativement à sa direction, ou « relativement à sa quotité. Les différentes directions « que la machine fait prendre à l'action du moteur dé- « pendent de la liaison que la forme même de la ma- « chine établit entre les corps et se rapportent aux « mouvements purement géométriques dont la théorie « complète serait si importante.

« Lorsqu'il s'agit, dit encore Carnot dans un de ses « ouvrages de géométrie, de déterminer la marche d'un « fil qui forme successivement les mailles d'un tricot, « il ne s'agit nullement des lois de l'action et de la « réaction, ni de la force avec laquelle le fil est tendu ; « il en est de même enfin de toutes les machines dont « le but n'est pas d'économiser des forces, mais d'éta- « blir tels ou tels rapports entre les directions et les « vitesses des différents points d'un système. »

Mais personne n'a mieux senti l'importance de la Cinématique que M. Ampère, qui en a admirablement indiqué l'étendue et les limites dans son *Essai sur la Philosophie des sciences* (1830), que nous croyons devoir citer en entier.

« *Cinématique.* — Longtemps avant de m'occuper « du travail que j'expose ici, j'avais remarqué qu'on « omet généralement au commencement de tous les « livres qui traitent de ces sciences (relatives aux « mouvements et aux forces), des considérations qui, « développées suffisamment, doivent constituer une « science de troisième ordre, dont quelques parties « ont été traitées, soit dans des mémoires, soit même « dans des ouvrages spéciaux ; tels, par exemple, que « ce qu'a écrit Carnot sur le mouvement considéré « géométriquement, et l'*Essai sur la composition des* « *machines* de Lantz et Bétancourt. Cette science doit « renfermer tout ce qu'il y a à dire des différentes sortes « de mouvement, indépendamment des forces qui peu- « vent les produire. Elle doit d'abord s'occuper de « toutes les considérations relatives aux espaces par-

« courus dans tous les différents mouvements, aux
« temps employés pour les parcourir, à la détermina-
« tion des vitesses d'après les diverses relations qui
« peuvent exister entre les espaces et les temps. Elle
« doit ensuite étudier les différents instruments à l'aide
« desquels on peut changer un mouvement en un
« autre; en sorte qu'en comprenant, comme c'est
« l'usage, ces instruments sous le nom de machines, il
« faudra définir une machine, non pas, comme on le
« fait ordinairement, *un instrument à l'aide duquel on*
« *peut changer la direction et l'intensité d'une force don-*
« *née*, mais bien *un instrument à l'aide duquel on peut*
« *changer la direction et la vitesse d'un mouvement*
« *donné*. »

« On rend ainsi cette définition indépendante de la
« considération des forces qui agissent sur la machine,
« considération qui ne peut servir qu'à distraire l'atten-
« tion de celui qui cherche à comprendre le méca-
« nisme. Pour se faire une idée nette, par exemple, de
« l'engrenage à l'aide duquel l'aiguille des minutes
« d'une montre fait douze tours, tandis que l'aiguille
« des heures n'en fait qu'un, est-ce qu'on a besoin de
« s'occuper de la force qui met la montre en mouve-
« ment? L'effet de l'engrenage, en tant que ce dernier
« règle le rapport de vitesse des deux aiguilles, ne
« reste-t-il pas le même, lorsque le mouvement est dû
« à une force quelconque autre que celle du moteur
« ordinaire, quand c'est, par exemple, avec le doigt
« qu'on fait marcher les aiguilles?

« Un traité où l'on considérerait ainsi tous les mou-

« vements, indépendamment des forces qui peuvent « les produire, serait d'une extrême utilité dans l'in- « struction, en présentant les difficultés que peut offrir « le jeu de certaines machines, sans que l'esprit de « l'élève eût à vaincre en même temps celles qui peu- « vent résulter de considérations relatives à l'équilibre « des forces.

« C'est à cette science où les mouvements sont con- « sidérés en eux-mêmes, tels que nous les observons « dans les corps qui nous environnent, et spécialement « dans les appareils appelés machines, que j'ai donné « le nom de Cinématique, de κινημα, *mouvement.*

« Après les considérations sur ce que c'est que *mou-* « *vement* et *vitesse*, la Cinématique doit surtout s'occuper « des rapports qui existent entre les vitesses des divers « points d'une machine, et en général d'un système « quelconque de points matériels dans tous les mouve- « ments que cette machine ou ce système est susceptible « de prendre; en un mot, de la détermination de ce « qu'on appelle *vitesses virtuelles*, indépendamment des « forces appliquées aux points matériels, détermina- « tion qu'il est infiniment plus facile de comprendre, « quand on la sépare ainsi de toute considération « relative aux forces. Lorsque parvenu à la science « du second ordre qui va suivre, on voudra enseigner « aux élèves qui auront bien saisi cette détermina- « tion et qui seront familiarisés avec elle depuis long- « temps, le théorème général connu sous le nom « de *principe des vitesses virtuelles*, ce théorème qu'il « est si difficile de leur faire comprendre en suivant

« la marche ordinaire, ne leur présentera plus aucune « difficulté. »

Il est impossible d'indiquer plus clairement la nécessité d'une science nouvelle, que ne l'a fait Ampère dans le passage que nous venons de citer. Aussi avons-nous cru qu'on ne pouvait changer le nom de Cinématique, qui lui a été donné par cet illustre savant. Nous avons profité pour notre travail de ses observations, sans avoir pu toutefois suivre toutes ses indications, car il eût fallu nous borner à des notions élémentaires et sacrifier l'utilité pratique que nous voulons nous efforcer de donner à ce Traité.

Nous ne pouvons résister au plaisir de citer encore un autre passage de l'*Essai sur la Philosophie des sciences*, où Ampère, voulant encourager des entreprises semblables à celle-ci, et répondant aux personnes qui contestaient l'utilité de son travail, ajoute en parlant de la Cinématique :

« Que s'il n'existe pas encore de traité complet sur « cette science et sur plusieurs autres, peut-être me « saura-t-on gré d'avoir indiqué des lacunes à combler, « des travaux à entreprendre ou à achever; et si j'en « crois un pressentiment qui m'est cher, j'aurai peut-« être indirectement donné naissance à de nouveaux « ouvrages spéciaux qui ne pourront manquer de ré-« pandre de plus en plus les sciences et leurs salutaires « effets. »

S'il était besoin encore d'autres autorités, nous ajouterions aux précédentes celle d'un juge bien compétent, M. Poncelet, le célèbre fondateur de la mécanique appli-

quée aux machines, qui, dans son cours de mécanique aux ouvriers de Metz, a consacré plusieurs leçons à la Cinématique, et qui, il y a peu de temps encore, dans des lettres provoquées par la proposition faite par le savant doyen de la Faculté des sciences, M. Dumas, de développer l'enseignement industriel, réclamait comme une nécessité l'enseignement de la Cinématique, dont mieux que personne il a pu apprécier l'importance extrême.

Si nous cherchons maintenant les traités généraux qui existent sur la science qu'ont indiquée tant de savants illustres, nous ne rencontrerons qu'une seule tentative, c'est l'*Essai sur la composition des machines*, de MM. Lantz et Bétancourt. Partant d'une vue ingénieuse que Monge avait indiquée dans son Cours de Géométrie descriptive, que les mouvements des organes des machines étaient nécessairement continus ou alternatifs, et, quant à la direction, rectilignes ou circulaires, ou d'après une courbe donnée, ils ont groupé deux à deux ces divers mouvements et décrit les organes employés dans les machines pour obtenir les transformations de mouvement correspondantes. Certes, ce travail était un important progrès, mais il est inouï que depuis quarante ans on se soit le plus souvent contenté de le copier, sans jamais tenter de l'améliorer. Il est pourtant bien insuffisant et offre de très grands défauts.

Le premier est de borner la composition des machines à la transformation des mouvements, ce qui est une idée fausse et incomplète de la question. Les em-

brayages, le volant, les cartons de la Jacquart, etc., sont, certes, des organes de machines, sans être pour cela ni des organes de récepteurs, ni des organes de transformation de mouvement, ni des outils.

Le second est de confondre le moteur physique qui imprime le mouvement avec la machine même. De quelle utilité peut-il être de considérer une roue hydraulique comme un moyen de transformer un mouvement rectiligne en un mouvement circulaire, parce que l'eau qui se mouvait en ligne droite vient tourner à la circonférence de la roue? L'eau est ici le moteur qu'on doit utiliser le mieux possible, cette condition seule détermine le mouvement qu'on lui fait prendre. Il n'en est pas de même des parties suivantes de la machine; ce n'est plus seulement l'économie des forces motrices qui est en jeu; mais, avant tout, la nécessité d'obtenir les mouvements convenables de l'outil, en vue du travail à effectuer.

Enfin, le travail de MM. Lantz et Bétancourt, conçu sans vues scientifiques, dénué, dit M. Poncelet, de la discussion nécessaire, n'offre rien de satisfaisant à l'esprit, ne peut servir de base à aucun enseignement rationnel.

L'utilité de cet ouvrage, fort remarquable en tant que premier essai dans une nouvelle voie, est donc bien faible aujourd'hui qu'il ne peut pas davantage servir de répertoire aux praticiens, ayant été fait avant les grands progrès accomplis depuis cinquante ans dans l'art de la construction des machines. Plusieurs solutions directes pour transformer un mouvement en un autre,

qui y sont décrites, seraient rejetées par le mécanicien le moins expérimenté à cause de leurs imperfections et parce qu'on obtient le même résultat chaque jour dans les ateliers, au moyen de solutions bien préférables sous tous les rapports.

Il importait donc de reprendre aujourd'hui ce travail pour ramener sous une forme scientifique l'étude des ingénieuses combinaisons de nos mécaniciens, pour faire passer dans l'enseignement et mettre à la disposition des générations nouvelles les résultats des travaux accumulés jusqu'à ce jour.

L'entreprise est d'autant plus possible aujourd'hui que si aucun travail d'ensemble n'a paru depuis l'essai de MM. Lantz et Bétancourt, la science n'en a pas moins avancé par un grand nombre de travaux relatifs aux diverses questions que doit traiter la Cinématique. Nous citerons comme exemple les travaux de M. Olivier, le savant professeur de géométrie descriptive du Conservatoire des Arts et Métiers, qui a traité pour la première fois, d'une manière complète, la théorie géométrique des engrenages, à laquelle il a fait faire de grands progrès. Le cours de machines de l'École Polytechnique, longtemps professé par le célèbre secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, M. Arago, par le bien regrettable M. Savary, et aujourd'hui par le savant M. Chasles, contient des travaux du plus grand intérêt sur l'application des méthodes géométriques au tracé des organes des machines. Enfin, des matériaux importants sont déposés dans divers ouvrages périodiques; en un mot, il existe aujourd'hui un nombre considé-

rable de matériaux qui doivent prendre place dans un traité de Cinématique.

Le travail qui consiste à rassembler les éléments épars d'une science, à les coordonner et en faire un ensemble, est évidemment d'une utilité extrême. Un cours, un ouvrage qui présente sous forme logique un ensemble de vérités; qui rend, en un jour, vulgaires des connaissances que chacun devait puiser la veille à mille sources différentes, sans pouvoir souvent en saisir les relations, nous paraît un tel service rendu à la société que nous croyons que c'est un devoir pour quiconque entrevoit la possibilité d'atteindre un semblable résultat de se mettre à l'œuvre. C'est cette conviction qui nous a déterminé à publier ce Traité.

Depuis que les pages précédentes ont été écrites, M. Tom Richard nous a fait connaître par quelques extraits remarquables qu'il a publiés dans l'*Aide-Mémoire des Ingénieurs*, le bel ouvrage de M. R. Willis (Cambridge 1841), intitulé *Principles of Mecanism*, ouvrage écrit sous l'influence des idées qui nous avaient fait entreprendre notre premier travail, et avec toutes les ressources qu'offrait l'art de la construction des machines, si développé en Angleterre. Nous avons fait de nombreux emprunts à cet ouvrage tout à fait remarquable, notamment la théorie des bielles, le tracé pratique des engrenages, la théorie des trains épicycloïdaux.

Malgré l'éminent mérite que nous reconnaissons à ce bel ouvrage, il ne remplit pas complétement, à notre avis, la lacune que nous avons signalée. Préoccupé, comme M. Ampère, de l'idée de formuler une science

complétement distincte de la mécanique proprement dite, l'auteur ne se propose pour but de ses travaux que la science qu'il appelle *pure mecanism*, il n'étudie les mouvements que comme produits par rotation, glissement, etc., sans introduire la notion de force ou de travail. L'étude géométrique des organes de transformation de mouvement est exclusivement l'objet de son livre, et il laisse complétement de côté l'étude au point de vue dynamique de ces organes, il néglige l'étude du frottement, des résistances passives, etc., indispensable cependant pour la comparaison de ces organes, nécessaire même pour l'établissement de quelques-uns.

D'abord il nous paraît fâcheux de passer sous silence les récepteurs, les outils, dont les mouvements déterminent le choix des organes des machines, et qui donnent lieu à des considérations géométriques importantes. Mais surtout nous croyons qu'on s'expose à donner aux lecteurs des idées fausses en leur présentant, par l'exclusion de toute idée de force, de résistance passive, comme équivalents entre eux des organes entre lesquels il se trouve dans l'usage des différences capitales.

Il nous paraît impossible de désunir ainsi d'une manière absolue, deux parties d'une même science; il y a seulement grand avantage à l'étudier de deux points de vue différents; à faire prédominer successivement, dans deux cours également utiles, le point de vue dynamique et le point de vue géométrique. Nous le répétons, comment, sans la considération des frottements, faire comprendre pourquoi un organe est préférable à un autre; sans des considérations dynamiques, les avantages du

mouvement uniforme? En faisant complétement abstraction des forces, ce n'est plus une partie de la mécanique que l'on traite, on fait de la géométrie pure. Ce n'est que dans un cours élémentaire qu'on peut se borner à un point de vue exclusif pour reprendre d'une manière plus complète les mêmes sujets lorsque l'élève sera plus avancé.

Maintenant que nous avons expliqué l'esprit dans lequel un traité de Cinématique doit être conçu, nous allons définir d'une manière précise quelles sont les limites, les divisions naturelles de la Cinématique.

Faudra-t-il étudier les nombreuses machines qu'emploie l'industrie, passer en revue successivement celles qui servent à la filature, au tissage, les horloges, etc.? Faudra-t-il, en un mot, étudier successivement toutes les fabrications pour comprendre comment fonctionnent les diverses machines qui y sont employées, et dont le nombre augmente chaque jour? Cette marche serait la seule possible, la seule qui permît un enseignement industriel complet (si tant est qu'on pût réunir les éléments d'un enseignement aussi étendu), si aucun principe scientifique ne venait nous guider, c'est celle qu'emploie l'apprenti pour apprendre un état en plusieurs années que quelques heures de leçons eussent pu beaucoup abréger.

Mais si nous parvenons à formuler d'abord la science qui préside à la construction des organes élémentaires des machines, à enseigner les principes qui doivent guider dans toutes les applications, il n'y a plus danger de fatiguer par trop de détails les lecteurs qui ne doivent être ni filateurs, ni tisserands, etc.; le champ indéfini qui se présentait devant nous se circonscrit singulière-

ment, et toutes les machines seront connues, ou, pour le moins, comprises à une première inspection, quand on aura étudié les lois qui président à la construction des organes qui se retrouvent dans toutes et qui sont bien loin d'être en nombre aussi considérable qu'on pourrait le croire, d'après la multiplicité des machines qu'engendre la variété des combinaisons de ces éléments. C'est par l'étude de la nature et du mode d'action de ces organes primitifs de toute machine que l'on peut arriver à comprendre et à combiner une machine quelconque; étude bien plus profitable que ne serait celle d'un grand nombre de machines spéciales, si l'esprit n'arrivait par la force des choses à effectuer nécessairement cette décomposition, à analyser et étudier les éléments eux-mêmes.

Si nous portons notre attention sur ces organes dont sont composés les machines, nous apprécierons mieux l'aperçu dû au génie de Monge, et sur lequel seul peuvent reposer les divisions fondamentales de la Cinématique. Monge reconnut *à priori* que les mouvements d'un organe d'une machine étaient continus ou alternatifs, circulaires ou rectilignes, ou d'après une courbe donnée. Mais pourquoi en est-il ainsi? Cette classification est-elle simplement empirique ou bien fondée sur la nature des choses? Il nous sera facile d'établir que si ce principe est vrai, c'est parce que toute machine simple (et chaque organe élémentaire d'une machine est une machine simple), étant un corps dont le mouvement est gêné par un obstacle, suivant que cet obstacle est formé par un point fixe, deux points ou une droite, trois points ou un plan

passant par ces trois points, l'organe élémentaire est nécessairement : du système levier, c'est-à-dire à mouvement circulaire alternatif, ou du système tour, c'est-à-dire à mouvement circulaire continu, ou enfin du système plan, engendrant le mouvement rectiligne continu ou alternatif, ou suivant une courbe donnée.

Le nombre de points non en ligne droite faisant obstacle au mouvement peut être plus grand que trois; mais cela ne fournit pas de nouveau mouvement élémentaire, comme nous le faisons voir ci-après.

On voit d'ailleurs que ces mouvements élémentaires, tout limité que soit leur nombre, renferment tous les mouvements possibles, car ceux-ci se réduisent toujours en chaque instant à un mouvement de translation combiné avec un mouvement de rotation autour d'un certain axe.

On voit donc, en complétant l'idée de Monge, que les relations des organes entre eux, que les communications et les transformations de mouvement ne sont pas, comme on peut le croire *à priori*, des systèmes dont on ne voit la raison d'être que dans l'imagination d'un inventeur, mais des moyens de résoudre le problème parfaitement posé de faire agir en chaque instant une machine simple sur une autre machine simple, problème qui n'admet qu'un nombre limité de solutions devant satisfaire à des conditions clairement déterminées.

Ceci étant établi, les derniers éléments des machines ne pouvant être, quant à la nature des guides de leur mouvement que l'un des systèmes : levier, tour ou plan, l'étude de toutes les machines se réduit :

1° A l'étude des machines simples, tant de celles que l'on peut mettre en jeu à l'aide des forces naturelles, que de celles dont le mouvement est utilisé pour effectuer le travail des opérations industrielles; à la détermination des conditions de direction et de vitesse qui doivent être satisfaites dans ces deux cas;

2° A l'étude des moyens de faire agir une machine simple sur une autre machine simple, et par suite à celle des systèmes qui permettent d'obtenir un mouvement quelconque à l'aide d'un autre mouvement quelconque;

3° A l'étude des constructions particulières ou de la combinaison de plusieurs de ces systèmes pour résoudre quelques problèmes nécessaires au bon emploi des machines, ce qui constitue les organes dits modificateurs du mouvement.

La lecture de cet ouvrage fera, nous espérons, reconnaître combien l'ordre auquel nous amènent les considérations précédentes est simple et logique, et combien il peut faciliter l'étude de la Cinématique, qui formera sans doute, à l'avenir, une partie indispensable de tout enseignement industriel.

TRAITÉ
DE CINÉMATIQUE

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

1. *La Cinématique a pour objet l'étude, au point de vue géométrique, des systèmes à l'aide desquels on peut produire, transmettre et modifier à volonté un mouvement déterminé.*

D'après la définition même, on voit que la Cinématique repose surtout sur la géométrie, dont nous supposerons les éléments connus des lecteurs de ce livre; mais comme elle exige nécessairement aussi la connaissance des principes fondamentaux de la Mécanique, science dont la Cinématique forme une division, et que ce cours peut être le premier par lequel on débute dans l'étude de la Mécanique, nous les rappellerons ici; nous bornant à ce qui est strictement nécessaire pour l'intelligence de ce qui va suivre, aux notions fondamentales avec lesquelles on ne saurait trop familiariser l'esprit des personnes qui étudient les sciences mécaniques.

Du Mouvement.

2. On dit qu'un point est en repos lorsqu'il occupe constamment la même position dans l'espace, et qu'il est en mouvement lorsque cette position change. Nous jugeons qu'un point change de position quand nous voyons varier sa distance à des objets dont les positions relatives ne changent pas.

3. Le temps ne peut pas plus être défini que l'espace; l'égalité dans le temps, d'où dérive la mesure du temps, peut se définir ainsi : Deux intervalles de temps sont égaux lorsque deux corps identiques, placés dans des conditions identiques au commencement de chaque intervalle, et soumis aux mêmes actions et influen-

ces de toute espèce, auront parcouru le même espace à la fin de ces intervalles.

L'unité de temps dont nous nous servirons sera la seconde sexagésimale.

Le temps est donc une grandeur qui peut être représenté par un nombre ou une suite de divisions sur une ligne droite, comme fig. 1.

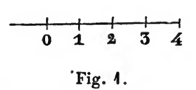


Fig. 1.

4. Le mouvement d'un point est essentiellement continu, c'est-à-dire qu'un mobile ne peut occuper deux positions distinctes dans l'espace sans passer par tous les points d'une certaine ligne joignant ces positions extrêmes. Tout point en mouvement décrit donc une ligne droite ou courbe, qu'on appelle *trajectoire*. On aura une connaissance complète du mouvement d'un point lorsqu'on connaîtra sa trajectoire et sa position en chaque instant sur celle-ci.

Du mouvement uniforme.

5. On appelle mouvement uniforme celui dans lequel les espaces parcourus par le mobile sont entre eux comme les temps employés à les parcourir ; égaux pour des intervalles égaux. Si on appelle e e' deux espaces comptés à partir de la position initiale du mobile, t t' les temps employés à les parcourir, on a :

$$e : e' :: t : t'.$$

Le rapport constant $\frac{e}{t}$ de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir est la vitesse du corps, qui se trouve évaluée par l'espace parcouru en une seconde. En appelant v cette vitesse, on a : $e = vt$.

Du mouvement varié.

6. Le mouvement d'un point matériel peut se composer d'une suite de mouvements uniformes différents, de vitesses différentes. Si on conçoit que la durée de chacun de ces mouvements devienne infiniment courte, la vitesse varie d'une manière continue ; on a le *mouvement varié*. La vitesse n'est plus constante pendant toute la durée du mouvement ; elle n'est en chaque instant le rapport de l'espace parcouru au temps, que si l'on considère l'espace parcouru

en un temps infiniment court; c'est la vitesse qui existerait en chaque instant si le mouvement uniforme qui a une durée infiniment courte se prolongeait pendant une seconde.

Parmi les mouvements variés, il en est un particulièrement remarquable, c'est le mouvement uniformément varié dans lequel la vitesse croit ou décroit de quantités constantes en des temps égaux, comme cela a lieu pour la chute des corps à la surface de la terre.

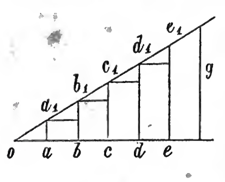


Fig. 2.

Divisons le temps t du mouvement en n petits intervalles θ, pendant la durée desquels nous supposerons le mouvement uniforme (fig. 2) ; représentons ces intervalles égaux par les divisions égales d'une ligne oa, ob, oc.... La vitesse, après le premier intervalle, étant aa_1, l'espace parcouru dans le second intervalle en vertu de cette vitesse sera $e = vt$ ou $e = aa_1 \times \theta = ab \times aa_1$, c'est-à-dire le petit rectangle aba_1a_2. A la fin du second instant la vitesse sera $2v$ et l'espace parcouru dans l'instant suivant sera mesuré par l'aire du rectangle bcb_1b_2, et ainsi de suite ; l'espace total parcouru pendant le temps $n\theta$ sera donc donné par la somme des aires des rectangles dont les sommets a_1 b_1... sont sur une ligne droite. La différence entre la somme des aires de ces rectangles et celle du triangle oee_1 est de n petits triangles égaux à oaa_1, et puisque le temps t a été divisé en n intervalles égaux à θ, à $n \times \frac{\theta}{2} \times aa_1 = \frac{t}{2} \times aa_1$. Or, aa_1 étant aussi petit qu'on le voudra en rendant le nombre n très grand, on voit qu'à la limite, lorsque la vitesse croît d'une manière continue, l'aire du triangle représente l'espace parcouru. Si donc l'on appelle g la vitesse après l'unité de temps, on aura par suite de la similitude des triangles, après un temps t :

$$v : t :: g : 1,$$

ou $v = gt$ et $e = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}gt^2$.

On tire des formules ci-dessus $e = \frac{v^2}{2g}$ ou $v = \sqrt{2ge}$ en faisant disparaître le temps.

Mouvement de rotation autour d'un axe.

7. Quand un corps est assujetti à se mouvoir autour d'un axe fixe, tous les points matériels dont le corps est formé parcourent des arcs d'un même nombre de degrés, tournent tous d'un même angle. On rapporte ordinairement les mouvements de chaque point du corps au mouvement de celui qui est ou serait situé à une distance de l'axe égale à l'unité de longueur, à 1 mètre. La vitesse de ce point est dite la vitesse angulaire que nous désignerons par ω. Donc, si v représente la vitesse d'un point situé à une distance r de l'axe, on a :

$$v : r :: \omega : 1 \text{ ou } v = r\omega.$$

Si le corps fait n tours par minute, le chemin décrit par seconde est $\frac{n}{60}$ circonférences égales à $2\pi r$, donc $r\omega = n\frac{2\pi r}{60}$ et $\omega = \frac{n\pi}{30}$.

Si le mouvement est varié, la relation $v = r\omega$ subsiste toujours, les valeurs de v et ω variant toutes deux en chaque instant. Si le mouvement est uniformément varié, appelant ω la vitesse angulaire en chaque instant, et φ la vitesse angulaire après l'unité de temps, g devient $r\varphi$, on a donc $v = gt = r\varphi t$ et $e = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}r\varphi t^2$.

Représentation des lois du mouvement.

8. Si l'on porte sur une droite des intervalles égaux pour représenter des temps égaux, et qu'en chacun des points de division on élève des perpendiculaires sur lesquelles on prend des longueurs proportionnelles à la vitesse correspondante du mobile en chaque instant, on pourra rencontrer trois cas différents :

Toutes les vitesses seront égales (figure 3), et la ligne passant par les extrémités des droites proportionnelles aux vitesses en chaque instant, sera une droite parallèle à celle sur laquelle le temps est marqué;

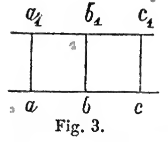


Fig. 3.

Cette ligne s'éloignera (fig. 4) de la première à partir de l'origine, la vitesse sera croissante, le mouvement accéléré;

Enfin la disposition sera inverse (fig. 5) et la vitesse ira en dé-

croissant, le mouvement sera retardé. Si la ligne $a_1 c_1$ est droite, le mouvement est uniformément varié, l'accroissement ou la diminution de vitesse est proportionnel au temps.

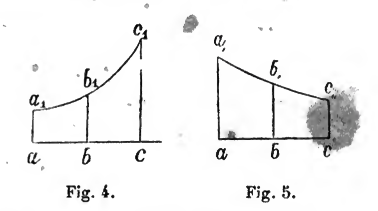


Fig. 4. Fig. 5.

On voit que des courbes peuvent parfaitement servir à représenter complètement les lois complexes du mouvement d'un corps ; car (de même que art. 6) les aires de ces courbes représentent les espaces parcourus comme les abcisses les temps, et les ordonnées les vitesses. — Nous verrons plus loin comment de semblables courbes servent dans certains problèmes de Cinématique pour produire les mouvements eux-mêmes.

Des Forces.

9. Lorsqu'un corps est en repos, il y demeure jusqu'à ce qu'une action extérieure vienne le mettre en mouvement : il ne peut se mouvoir de lui-même ; de même lorsqu'il est en mouvement il ne peut de lui-même modifier ou anéantir ce mouvement.

On appelle *force la cause qui tend à produire ou à modifier le mouvement.*

Sans connaître la nature de la force, nous concevons très clairement qu'elle agit au point où elle est appliquée, suivant une certaine direction, et avec une certaine intensité.

10. La distinction entre la matière et la force, le principe de l'inertie de la matière est fondamental. C'est un résultat d'expérience dont la certitude est confirmée par toutes les conséquences auxquelles conduit la science qui le prend pour point de départ. Nombre de phénomènes servent à le démontrer ; ainsi on sait qu'un corps se mouvant par l'effet d'une impulsion première sur un plan horizontal se meut d'autant plus longtemps que le plan est plus

poli, que les résistances sont moindres. D'où l'on conclut avec toute certitude que, en l'absence des résistances et actions extérieures, le mouvement se continuerait indéfiniment, sans aucun changement, par suite en ligne droite et avec une vitesse constante, serait uniforme.

Mesure des forces.

11. Nous avons dit qu'une force était une cause de mouvement. Quand le mouvement du corps est empêché par un obstacle insurmontable, la force se manifeste par une pression ou une traction sur l'obstacle. Les efforts dont sont capables des agents quelconques dans une direction et en un point déterminé sont par suite toujours comparables et peuvent se mesurer par des poids, ou mieux à l'aide d'instruments à ressort tels que le *dynamomètre* de Regnier, certains pesons du commerce, etc., qui ont été tarés ou vérifiés à l'avance, en y suspendant des poids *étalons*. On conçoit, en effet, que le même degré de flexion de ces ressorts, en supposant leur élasticité parfaite et indépendante du temps ou de la fatigue (ce qui n'est pas et exige de fréquentes vérifications) indique constamment le même effort absolu, la même pression, pourvu que cet effort, cette pression s'exerce au même point et dans la même direction. Ainsi, les forces sont toujours exprimables en unités de poids, en *kilogrammes* par exemple, dont le nombre représente la grandeur de la force, et qui, comme tout nombre, pourra être représenté par des longueurs de ligne droite. — Cette manière d'évaluer les forces fait bien comprendre la loi, établie comme loi fondamentale par Newton, et confirmée par tous les résultats de la science, que *l'action est égale et contraire à la réaction*, c'est-à-dire que toujours, comme on le voit dans un ressort, le corps qui presse avec une certaine force est pressé par une force égale de direction contraire.

C'est ainsi, par exemple, que les choses se passent dans le choc, à la rencontre de deux corps parfaitement élastiques en mouvement. Il se développe aux points de contact, de la part de l'un des efforts de compression d'abord puis d'extension, de la part de l'autre des efforts semblables opposés et égaux aux premiers. Les

ressorts moléculaires fléchis ou tendus, réagissent avec une force précisément égale et contraire à celle qui les comprime, les fléchit.

Determination des forces d'après les mouvements qu'elles impriment à un point libre.

12. Au lieu de déterminer les forces d'après l'intensité de la pression qu'elles exercent sur un corps en repos, ou indépendamment de la notion de mouvement, on peut déduire leur mesure de celle des mouvements qu'elles impriment à un corps libre.

Principe expérimental. — Une force agit sur un corps en mouvement comme elle agirait sur un corps en repos; c'est-à-dire, que d'après ce principe fondamental, dit de l'indépendance des forces, les forces (et les mouvements qu'elles produisent) coexistent simultanément. Ce principe est un de ceux qui servent de base à la mécanique et sont verifiés par l'expérience de chaque jour. Ainsi nous savons qu'étant placés dans un système en mouvement, un bateau par exemple, nos efforts sur les objets qui nous environnent produisent absolument le même effet que si nous étions à terre, ou si le bateau était en repos. C'est ainsi encore que le mouvement propre de la terre ne nous est nullement sensible par des phénomènes mécaniques, tandis que si le principe de la coexistence des mouvements n'était pas vrai, ceux dus à l'action d'une même force seraient différents suivant qu'ils seraient dans la direction du mouvement de la terre ou de direction contraire, ce qui est opposé à notre expérience de chaque jour.

Ce principe permet de remonter du mouvement aux forces.

Pour le cas d'un mouvement uniforme, il est évident qu'il faut que toutes les forces qui agissent à chaque instant sur le système soient nulles ou se détruisent, ce qui constitue l'état d'équilibre, autrement les mouvements dus à ces forces viendraient coexister avec les mouvements initiaux, et par suite modifier les vitesses.

Le mouvement uniformément varié d'un point est produit par l'action d'une force constante en intensité et en direction, et le mouvement a la même direction et le même sens que cette force.

En effet, après un temps θ, une force constante ayant fait prendre au corps une vitesse v, après un autre intervalle θ, elle lui aura

imprimé une autre vitesse v; celle-ci sera donc $2v$ après le temps 2θ, d'après le principe sus-énoncé, c'est, on le voit, la loi du mouvement uniformément varié $v = gt$; donc, ce mouvement est produit par une même force agissant d'une manière constante. Telle est la pesanteur pour laquelle la valeur de $g = 9{,}808$.

Puisque l'effet d'une force sur un corps est le même, soit que d'autres forces aient précédemment agi sur ce corps, soit qu'elle agisse sur le corps en repos, on peut établir le principe suivant :

Deux forces constantes F *et* F' *sont entre elles comme les variations de vitesse* w, w', *qu'elles imprimeraient à un même point matériel, en agissant pendant un même temps et d'une manière constante dans le sens de la vitesse initiale ou en sens contraire.*

En effet, si une force égale à l'unité produit un accroissement de vitesse égal à a, F forces semblables produiront l'accroissement $F \times a = w$; de même pour la force F', on aura : $F' \times a = w'$, donc :

$$F : F' :: w : w'.$$

Pour avoir la mesure de la force constante F, nous pouvons la comparer à une autre force dont l'effet sur le même corps soit connu, à la pesanteur. Nous savons que l'accroissement de la vitesse communiqué par la pesanteur dans le temps θ est $g\theta$, nous aurons donc, en appelant P le poids du corps, ou l'effort exercé par la pesanteur :

$$F : P :: w : g\theta, \text{ ou } F = \frac{P}{g}\frac{w}{\theta}.$$

La quantité $\frac{P}{g} = M$ s'appelle la masse, elle est évidemment proportionnelle à la quantité de molécules matérielles, pesantes, contenues dans un corps.

Puisque la force est constante ou le rapport $\frac{w}{\theta}$ constant, on a encore, après un temps T, $FT = MV$, et après l'unité de temps $F = MV$, quantité à laquelle on a donné le nom de quantité de mouvement.

Les forces constantes peuvent donc être mesurées par le produit de la masse du corps auquel elles sont appliquées par la vitesse qu'elles lui font acquérir pendant l'unité de temps, en

entendant que l'on a pris pour unité de force celle qui fait parcourir à l'unité de masse dans l'unité de temps, l'unité de longueur.

Nous avons déjà vu que nous prenions le kilogramme pour unité de force, le mètre pour unité de longueur, la seconde pour unité de temps ; l'unité de masse sera $\frac{P}{g} = M$, P étant égal à 1 kil., g égal à 9,808, donc la masse prise pour unité est 9,808 celle d'un kilogramme ou d'un décimètre cube d'eau distillée.

La proportionnalité de deux forces aux masses de deux corps auxquels elles imprimeraient une même vitesse dans le même temps, qui résulte de l'expression des forces que nous venons de trouver, est une conséquence de l'inertie. En effet, si une force F imprime à une masse de matière m une certaine vitesse, puisqu'il faut une force 2 F pour imprimer à une masse $2m$ cette même vitesse, c'est que chaque force F a servi à vaincre l'inertie de chaque masse m. La machine d'Atwood sert dans les cours de physique à démontrer par l'expérimentation, l'exactitude de cette loi pour la pesanteur.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède qu'il s'agissait de forces constantes. Si elles étaient variables, la première relation $F = \frac{P}{g}\frac{w}{\theta}$, dans laquelle θ a une valeur quelconque, serait toujours applicable, à la condition de prendre θ assez petit pour que la force pût être considerée comme constante pendant cet intervalle de temps. Pour toute valeur de θ, la formule ci-dessus donnera la valeur d'un effort moyen constant capable de communiquer dans le même temps la même vitesse à la même masse que la force cherchée; effort moyen qui se rapprochera d'autant plus de la force réelle que l'on observera la variation w pour un intervalle de temps moindre.

Composition des Forces.

13. Un point soumis à l'action de plusieurs forces ne pouvant suivre qu'une seule direction, se meut en chaque instant comme s'il obéissait à une force unique qui agirait suivant cette direction. Les forces qui agissent sur lui peuvent donc être remplacées par une seule, à laquelle on donne le nom de *résultante*, ou réci-

proquement on peut remplacer une force unique par deux ou plusieurs forces qui seraient ses *composantes*.

Soient P et Q deux forces agissant au point A (fig. 6), et représentées par deux droites de longueur proportionnelle à l'intensité de ces forces. Chacune de ces forces agissant isolément ferait parcourir en chaque instant, au point matériel, un espace proportionnel à sa grandeur : les deux droites AP, AQ représentent donc également les forces et les espaces parcourus.

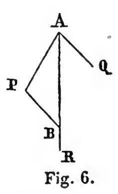


Fig. 6.

D'après le principe de la coexistence des forces et des mouvements, le corps soumis à l'action simultanée des deux forces arrivera, après chaque instant, en un point qui sera le même que s'il avait obéi successivement aux deux forces, c'est-à-dire au point B, obtenu en menant PB parallèle et égal à AQ, après le temps pendant lequel le point eût parcouru les longueurs AP, AQ, sous l'action isolée de chacune des forces P et Q, c'est-à-dire à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes AP et AQ.

Ceci étant vrai pour un espace parcouru quelconque, pour le tiers, le quart, etc., des longueurs AP, AQ, on voit qu'en réalité le mobile parcourra la diagonale AB, et comme les lignes de la figure représentent indifféremment les espaces parcourus et les forces, nous en arrivons à ce théorème :

Si deux forces P *et* Q *sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés d'un parallélogramme, leur résultante est réprésentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélogramme.*

Le principe de l'indépendance des mouvements fait bien comprendre que la direction de la résultante de deux forces est celle de la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces. Il est facile d'établir, *à posteriori*, que cette diagonale représentera bien en grandeur cette résultante.

En effet (fig. 7), si nous appliquons au point A, suivant le prolongement de la diagonale AI, une force R égale et directement opposée à la résultante des forces P et Q, il est évident que le point A

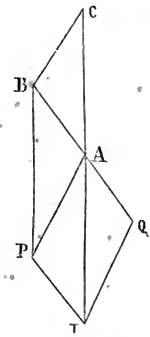


Fig. 7.

ne se mouvra pas, restera en équilibre sous l'influence des trois forces P, Q, R. La force Q, par exemple, sera donc égale et directement opposée à la résultante des deux autres P et R (condition évidemment nécessaire pour que des forces agissant sur un même point ne produisent pas de mouvement). Si donc, par le point P, nous menons une parallèle à A C, qui coupe en B le prolongement de A Q par le point B, AB = AQ sera en grandeur et en direction la résultante des forces P et R. Menant encore BC parallèle à AP, la longueur AC représentera la force R; car toute autre grandeur, conjointement avec AP, donnerait un parallélogramme dont la diagonale serait différente de AB = AQ. Mais AC = BP = AI, diagonale du parallélogramme Q A P, qui représente donc bien en grandeur la résultante des forces P et Q.

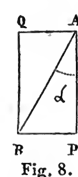


Fig. 8.

Nous en déduisons, que si une force R fait avec une ligne AP (fig. 8) un angle α, elle presse ou tire cette ligne, perpendiculairement, par une composante égale à R sin. α (1), et exerce une traction ou une pression dans le sens de cette ligne, représentée par R cos. α.

(1) On sait que pour introduire les angles dans le calcul, on y introduit des lignes liées intimement avec eux.

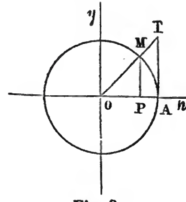


Fig. 9.

OM étant le rayon égal à 1 d'un cercle (figure 9).

Le *sinus* est la perpendiculaire M P, abaissée d'une extrémité de l'arc AM sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité.

Le *cosinus* est la longueur O P entre le pied de cette perpendiculaire et le centre du cercle.

Le *sinus-verse* est la distance AP, égale au rayon ou à 1 moins le cosinus.

La *tangente* est la distance A T interceptée sur la tangente menée à une des extrémités de

De ce que deux forces agissant en un point peuvent se réduire à une seule, il en sera évidemment de même pour un nombre quelconque de forces concourant en un même point.

Forces parallèles.

14. Soient P et Q deux forces parallèles (fig. 10), représentées en grandeur et en direction par deux lignes parallèles agissant aux

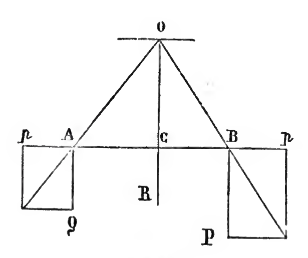


Fig. 10.

extrémités d'une ligne AB. Si l'on applique aux points A et B, dans la direction de AB, deux forces égales et de sens contraire p, p, ces deux forces se détruisant, rien ne sera changé dans le système.

Déterminant les deux résultantes de Q, p ; P, p, et les prolongeant jusqu'à leur rencontre en O, il est évident que si on applique en ce point toutes les forces du système (et l'on peut toujours supposer que les forces agissent en un point quelconque de la ligne qui représente leur direction) et qu'on redécompose en ce point les deux résultantes, qu'on rétablisse les forces Q, P agissant suivant la même ligne et qui par suite s'ajoutent, et les forces p, p qui se détruisent; la résultante se dirigera suivant OR, *c'est-à-dire sera parallèle aux deux forces, égale à leur somme*, et coupera la ligne AB en un point C, où l'on doit la considérer

l'arc, entre cette extrémité et le prolongement du rayon OM passant par l'autre extrémité.

La fig. montre que l'on a entre ces lignes les relations : $\sin.^2 a + \cos.^2 a = 1$.

$$\sin. a : \cos. a :: \text{tang.}\, a : 1, \text{ ou tang. } a = \frac{\sin. a}{\cos. a}.$$

comme appliquée, et tel que l'on aura d'après les triangles semblables :

$$P : p :: OC : BC ; Q : p :: OC : AC, \text{ d'où } P \times BC = Q \times AC, \text{ ou}$$
$$AC : BC :: P\ Q,$$

c'est-à-dire que la ligne A B sera divisée en raison inverse des forces P et Q.

Si les deux forces P et Q sont de direction opposée (fig. 11), la

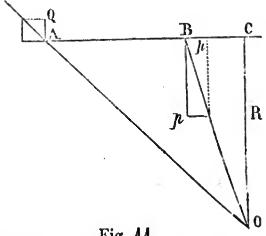


Fig. 11.

résultante s'obtient encore de la même manière, elle est égale alors à la différence des deux forces. Son point d'application n'est plus entre les points A et B, mais l'on a toujours $P \times BC = Q \times AC$.

Si les deux forces étaient égales, les deux résultantes partielles de P, p ; Q, p obtenues par la construction précédente restant parallèles, il n'y a plus de résultante unique. Il devient alors impossible de faire équilibre avec une seule force à l'action des deux premières. Réciproquement, lorsqu'un corps est tenu en repos par une seule force, il faut que toutes les autres forces appliquées au corps ne produisent pas le système dont nous venons de parler, aient une résultante unique égale et de direction opposée à la force considérée.

Le *couple*, ou système de deux forces égales parallèles et de sens opposé, peut être considéré, par rapport à un corps libre, comme engendrant les mouvements de rotation de la même manière que la résultante rectiligne engendre le mouvement de translation. C'est sur la considération de ces deux éléments qu'est fondée la *Statique* de M. Poinsot, ouvrage très remarquable, dans lequel le savant auteur est parvenu à démontrer d'une manière

élémentaire et synthétique toutes les propositions relatives à l'équilibre.

15. On peut établir *à priori* la composition des forces parallèles, en partant du principe bien évident que deux forces égales et parallèles, agissant dans le même sens, ont pour résultante une force double de chacune des premières, agissant au milieu de l'intervalle qui les sépare.

En effet, deux forces quelconques peuvent être partagées en un certain nombre de forces égales, réparties suivant des divisions de la ligne qui les réunit en nombre double de celui qui représente la somme des deux forces.

Soient, par exemple (fig. 12), deux forces parallèles P et

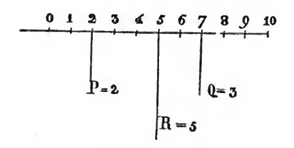


Fig. 12.

Q, et soient P = 2 kil. Q = 3 kil. Divisons en 2 + 3 = 5 parties la distance qui sépare les points d'application des deux forces.

On peut remplacer Q par six efforts partiels égaux à un 1/2 kil. répartis de chaque côté du point d'application et à des distances égales, et P par quatre efforts égaux semblablement disposés. La résultante de ces dix forces, égales à $^1/_2$ kil. et également espacées, sera évidemment au point milieu marqué 5, et égale à 5 kil., autrement dit le résultat déjà trouvé.

16. Il résulte de ce qui précède, qu'un *système quelconque de forces appliqué à un même corps solide, peut toujours se réduire à deux forces.*

Nous le démontrerons d'abord pour le cas de trois forces.

Soient P, Q, R (fig. 13) trois forces quelconques appliquées aux trois points A, B, C d'un même corps solide. Joignons CA et CB.

Si les plans PAC, ABC, qui ont le point C commun, ne se confondent pas, ils se couperont suivant une droite CI. Prenons sur

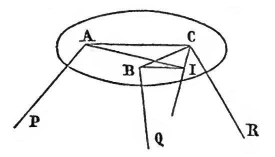


Fig. 13.

cette droite un point quelconque, I, faisant partie du corps solide ou supposé lié invariablement avec lui.

Joignons AI et BI. Les droites AP, AI, AC, étant dans un même plan, on pourra toujours décomposer la force P en deux autres; l'une, p, dirigée suivant AI, l'autre, p', dirigée suivant CA. On pourra de même décomposer la force Q en deux autres : l'une, q, suivant BI; l'autre, q', suivant CB. Les forces p et q concourant au point I, pourront se composer en une seule que nous désignerons par S. Les forces p', q' et R concourant au point A, pourront se composer en une seule que nous désignerons par S'. Le système des trois forces P, Q, R se trouvera donc remplacé par les deux forces S et S'.

Soient maintenant F F′ F″ F‴... des forces en nombre quelconque appliquées à un même corps solide. En vertu de ce qui précède, les trois forces F F′ F″ peuvent être remplacées par deux que nous nommerons S_1 et S_2. Les forces S_1 S_2 et F‴ pourront à leur tour être remplacées par deux forces S_3 et S_4. En continuant ainsi, on voit que le système entier des forces agissant sur le corps solide peut être remplacé par le système de deux forces R et R'.

Généralement ces deux forces R et R' ne seront pas dans un même plan. Si elles étaient dans un même plan, elles seraient concourantes ou parallèles, et dès lors pourraient se réduire ou à une seule, ou à un couple, ou même se détruire entièrement dans le cas de l'équilibre.

Dans le cas général où les deux forces (fig. 14) ne sont pas

dans le même plan, on peut les considérer comme se réduisant à une force et un couple, c'est-à-dire qu'il se produira un double mouvement de rotation et de translation. En effet, A et B étant les points d'application de ces forces P, R′, appliquons au point B deux forces $r\,r$ parallèles, égales à P et directement opposées entre elles, qui par conséquent se détruisent, les forces R′, r se composeront en une seule R″, et les forces parallèles et égales P et $-r$ formeront un couple.

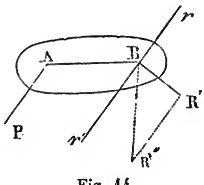


Fig. 14.

Du Travail des Forces.

17. Les forces de la nature agissent toujours par une succession continue d'efforts déterminés le long du chemin parcouru par leur point d'application. Il y a donc une relation intime entre le chemin parcouru et l'effet produit par les causes de mouvement. Ces deux éléments, l'effort en chaque instant et le chemin parcouru, doivent être étudiés en même temps; si on peut à la rigueur les étudier séparément quand il s'agit de corps libres, pour lesquels le chemin parcouru résulte directement de la grandeur des forces, il n'en est point de même quand on considère des systèmes de corps pour lesquels des liaisons spéciales déterminent les chemins que l'action de la force peut faire parcourir à son point d'application. Dans ce cas, le mouvement de ce point ne dépend plus seulement de la force, mais encore des liaisons du système.

Il devient alors nécessaire de considérer en même temps la force et le chemin parcouru, *le produit de la force par le chemin décrit par son point d'application, évalué suivant la direction de cette force.* C'est ce qu'on appelle le travail de cette force, notion fondamentale de la mécanique appliquée. Entrons dans quelques détails à cet égard.

Supposons qu'une force verticale, dirigée de bas en haut, soit employée à élever uniformément un fardeau; cette force sera constante et égale au poids du fardeau. Quant à l'effet produit, il sera évidemment proportionnel au poids du fardeau élevé, ou, ce

qui revient au même, à la force considérée; mais il sera aussi proportionnel à la hauteur verticale que le fardeau aura parcourue; car, sans mouvement, la force se réduit à une pression, ne produit plus d'effet; en sorte que celui-ci sera, en définitive, mesuré par le produit de cette force par cette hauteur. Cette quantité est ce qu'on appelle *le travail*. Rien de plus facile donc pour le cas de l'élévation verticale des corps que d'évaluer ce travail en nombres; car, si l'on prend pour unité de travail, celui qui consiste à élever l'unité de poids à l'unité de hauteur, il paraîtra évident qu'élever à une hauteur quelconque H un poids donné P, c'est répéter autant de fois l'effet partiel qui répond à l'unité de travail, qu'il y a d'unités de longueur dans H et d'unités de poids dans P; le produit PH est donc la mesure naturelle de l'effet ou du travail *utile* total de la force motrice, qui, par son activité, a élevé le poids P à la hauteur H; peu importe, au surplus, la manière dont aient varié l'effort et la vitesse propre de l'agent en intensité ou en direction : car l'effet dont il s'agit ne suppose en lui-même autre chose qu'un effort vertical constant, mesuré par P, et dont le point d'application décrit un certain chemin H dans sa direction propre.

Cette notion et cette mesure du travail mécanique cadre d'ailleurs avec la manière dont se payent, dans les arts, tous les travaux qui se rapportent à l'élévation verticale des fardeaux; par exemple, quand il s'agit de tirer de l'eau du fond d'un puits, d'élever des terres, des matériaux quelconques à certaines hauteurs. En effet, le prix est toujours réglé proportionnellement au nombre des *mètres cubes* de chaque espèce de matière, dont le poids, et par conséquent la valeur vénale, doivent augmenter avec la densité.

L'unité de poids étant le kilogramme, et l'unité de longueur le mètre, l'unité de travail sera le kilogrammètre ou le kilogramme élevé à un mètre.

18. Voyons maintenant comment on peut évaluer le travail mécanique de forces quelconques, dont la grandeur peut toujours être évaluée en poids, et ramener l'expression de sa mesure aux mêmes unités que celle qui se rapporte à l'élévation d'un poids, suivant la verticale.

En y réfléchissant un peu, on voit, qu'exécuter un travail mécanique quelconque, c'est vaincre, d'une manière utile pour le besoin des arts, des résistances telles que la force d'adhésion des molécules des corps, la force du calorique et des ressorts, la force de la pesanteur, la résistance des fluides, les frottements et quelquefois l'inertie de la matière, comme lorsqu'il s'agit de lancer des projectiles, de mettre en action des marteaux, des pilons, etc.; les exemples de toute espèce ne sauraient ici manquer. Mais, pour vaincre et détruire successivement des résistances continuellement renouvelées le long d'un certain chemin, il faut un effort de traction ou de pression agissant au point d'application de cette résistance, et qui se renouvelle en se déplaçant lui-même constamment. Or, il peut arriver, ou que l'effort soit dirigé à chaque instant dans le sens du chemin décrit par son point d'application, ou que cet effet varie d'une manière quelconque, en grandeur et en direction, sans cesser néanmoins de faire constamment équilibre à la résistance que lui oppose directement son point d'application, en vertu du principe de l'action égale et contraire à la réaction.

Considérons d'abord le premier cas, et supposons que l'effort et par suite la résistance, conservent une valeur constante à tous les instants, ou pour chacun des éléments de chemin parcouru, on pourra évidemment appliquer à cet effort le même raisonnement que pour le cas où il s'agissait d'élever directement un poids à une certaine hauteur, sans lui faire quitter la même verticale; la quantité d'action qu'il développera dans une longueur de chemin donnée sera donc ici encore directement proportionnelle, et à l'intensité constante de cet effort et au nombre de fois qu'il a été répété, ou au nombre des résistances partielles et égales qui ont été vaincues, c'est-à-dire au produit de cet effort, exprimé en unités de poids, par la longueur effective du chemin parcouru dans sa direction propre, estimé en unités de distance. Q étant donc le nombre des kilogrammes qui mesurent l'effort, q celui des mètres qui mesurent la longueur du chemin, la valeur du travail pourra encore être exprimée par le produit :

$$Q^{k} \times q^{m} \text{ ou } Qq^{km},$$

en faisant attention qu'ici l'unité de travail 1^{km} se rapporte à un

effort constant de 1^k, qui se répète le long d'un chemin de 1^m dirigé d'une manière quelconque.

19. Quand le point d'application d'une force se meut dans une direction différente de celle de la force, ce n'est plus l'espace parcouru par ce point qu'on multiplie par la force pour former l'expression du travail produit par la force, c'est la projection de cet espace sur la direction de la force.

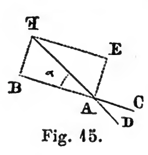


Fig. 15.

En effet, soit F une force agissant au point A (fig. 15), qui ne peut se mouvoir qu'en décrivant la ligne AB faisant l'angle α avec sa direction ; on sait que cette force peut se décomposer suivant deux autres, l'une suivant AB égale à F cos. α, l'autre suivant AE égale à F sin. α, perpendiculaire à AB. La première produira le travail Fcos. $\alpha \times$ A B, ce qui est la force multipliée par le chemin parcouru projeté suivant la direction de la force (A B cos. α) ; et sera le seul travail dû à la force F, car la composante suivant A E étant perpendiculaire à A B, le chemin parcouru dans sa direction est nul et son travail nul également. Elle ne produira qu'une pression (qui dans la pratique fait naître des résistances dont il faut tenir compte), et le travail de la force F se réduit à F $\times$ AB cos. α.

20. On peut rendre ce résultat bien sensible par une démonstration directe que nous empruntons à M. Morin.

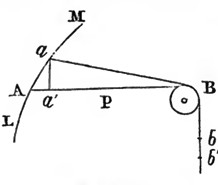


Fig. 16.

Soit AB (fig. 16) la direction de la force P sollicitant à un instant quelconque le corps qui décrit la courbe LM, sur laquelle nous le supposons parvenu au point A. Si l'on conçoit que la ligne AB soit un fil inextensible et parfaitement flexible, l'action de la force P pourra évidemment être remplacée par celle d'un poids Q, agissant à l'extrémité de ce fil, que l'on suppose passant sur la gorge d'une poulie tangente à sa direction et parfaitement mobile autour d'un axe. Il est clair que le travail, pendant le déplacement élémentaire de A en a de la force P ou du

poids Q qui lui est égal, sera mesuré par le produit du poids Q multiplié par la quantité bb' dont il sera descendu. Or, cette quantité est égale à la différence de aB et AB, que l'on obtiendra en enroulant aB sur la poulie, a décrivant un petit arc, qui ici se confond avec une ligne droite perpendiculaire à AB à cause de sa petitesse, donc $AB - aB = Aa'$, ligne obtenue en abaissant sur AB la perpendiculaire aa'. Donc enfin, comme nous l'avons déjà établi, le travail élémentaire sera $P \times Aa' = P \times Aa \cos. \alpha$ (Aa' étant la projection de $Aa = Aa \cos. \alpha$, α étant l'angle de la direction de la force et du chemin parcouru).

21. Quand la force P est variable et que la direction suivie par son point d'application est également variable, pour déterminer le *travail*, on divise le temps du mouvement en espaces assez petits pour que, pendant chaque instant, on puisse supposer la force constante et l'espace parcouru par son point d'application comme rectiligne; alors le travail se compose d'une suite de produits $P_1 H_1$, $P_2 H_2$, etc., dont on prend la somme.

Dans la pratique, cette somme se forme aisément.

Sur une ligne droite indéfinie (figure 17), on porte des longueurs $a_1\, a_2$, $a_2\, a_3$... proportionnelles aux nombres représentant les forces P_1, P_2...; par les points a_1, a_2, on élève des perpendiculaires proportionnelles aux chemins parcourus H_1, H_2.... Enfin par les extrémités de ces perpendiculaires, déterminées en nombre suffisant, on fait passer une courbe.

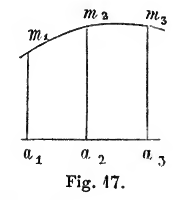


Fig. 17.

Il est clair que l'aire de chaque trapèze mixtiligne, $a_1\, a_2\, m_2\, m_1$ ..., exprime le produit $P_1\, H_1$ ... La surface comprise entre la droite $a_1\, a_3$ la courbe et les deux extrêmes ordonnées exprime le travail cherché; tous les moyens propres à évaluer l'aire de cette surface fourniront donc l'expression de la valeur du travail d'une force variable quant à l'intensité et quant à la direction du chemin parcouru.

De l'Équilibre des forces. — Du principe des Vitesses virtuelles.

22. Des principes que nous avons établis relativement à la composition des forces, on peut déduire les conditions d'équilibre d'un corps solide auquel diverses forces sont appliquées. Elles reviennent à exprimer qu'une quelconque des forces doit être égale et directement opposée à la résultante unique des autres forces, autrement le corps se mettrait en mouvement, les forces ne se détruiraient pas. Nous renverrons aux traités de Statique pour la traduction analytique de cette condition.

Nous préférons donner ici, d'après le célèbre Lagrange, la démonstration du principe des vitesses virtuelles qui fournit une équation renfermant implicitement toutes les équations qui doivent être satisfaites pour l'équilibre. Cette équation établie entre les quantités de travail que les forces produisent s'applique immédiatement aux machines, et nous donnera de suite les conditions d'équilibre de ces systèmes, but unique de tous ces préliminaires.

On appelle *vitesse virtuelle* un déplacement infiniment petit du point d'application d'une force, estimé suivant la direction de cette force, ce sont les chemins élémentaires que nous appellions H_1, H_2 (art. 21).

Voici comment Lagrange pose, dans toute sa généralité, le principe des vitesses virtuelles sur lequel il a fait reposer le grand édifice de sa mécanique analytique.

Si un système quelconque de tant de corps ou de tant de points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourra un espace infiniment petit, la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point auquel elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance (projeté sur cette puissance), sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé (dont la projection tombe en avant ou en arrière du point d'application).

Ce principe peut être démontré *à priori* comme il suit : Considérons une poulie mobile, soutenue par deux cordons et supportant un poids P (fig. 18), il est bien évident que les deux cordons seront tendus avec une force égale à $\frac{1}{2}$ P. Que l'on monte sur le même axe deux poulies semblables, et qu'on fasse passer le même cordon sur ces poulies et sur deux autres poulies fixes, la tension de chacun des quatre brins du cordon sera $\frac{1}{4}$ P. Et en général, dans ce système appelé *moufle*, composé de deux systèmes de poulies, l'un attaché à un point fixe l'autre mobile, embrassées par une même corde, dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, celle-ci est au poids porté par le système mobile, comme l'unité est au nombre de cordons qui y aboutissent. Nous faisons abstraction, bien entendu, de tout frottement et de toute raideur de la corde dans ce raisonnement, et alors il est bien évident qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur, le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il y a de cordons qui soutiennent les poulies mobiles, puisque ces cordons sont tous parallèles, également tendus et agissent dans des circonstances identiques.

Fig. 18.

Fig. 19.

Maintenant, supposons que chaque force qui agit sur le système soit remplacée par l'action de moufles fixées à des points extérieurs au système, dont la traction s'exerce suivant la direction de cette force. En faisant passer le même cordon sur toutes les moufles, au moyen de poulies de renvoi, la puissance qui appliquée à son extrémité mobile déterminera la tension de tous les cordons, produira, à l'aide de chaque moufle, des efforts égaux à chacune des forces du système; celles-ci seront à cette puissance unique comme le nombre des cordons est à l'unité.

Substituons, pour plus de simplicité, un poids à cette dernière puissance, après avoir fait passer sur une poulie fixe le dernier cordon (ce qui ne peut changer sa tension) qui soutient ce poids, que nous prendrons pour l'unité. Ce poids produit, par le moyen de la corde qui passe sur toutes les moufles, toutes les puissances qui agissaient sur le système, chaque puissance étant mesurée par le nombre des cordons qui concourent à la produire par leur tension.

Ainsi, le poids étant de 1 kil. (fig. 19), une force de 20 kil. sera remplacée par une moufle de 20 cordons (10 poulies libres) dont la tension uniforme serait de 1 kil., et de même pour une force quelconque.

Pour que le système demeure en équilibre, il faut que le poids ne puisse pas descendre par un mouvement quelconque infiniment petit de tout le système, car un poids tendant toujours à obéir à la gravité, s'il y a un déplacement du système qui lui permette de descendre, il descendra nécessairement et il se produira un mouvement dans le système. La condition de l'équilibre est donc que ceci ne puisse avoir lieu.

Désignons par a, b, c, etc., les espaces infiniment petits qu'un mouvement ferait parcourir aux différents points du système, suivant les directions des puissances qui les tirent (projetés suivant la direction de ces puissances), et par P, Q, R, etc., les nombres des cordons des moufles appliquées à ces points pour produire ces mêmes puissances; il est visible que les espaces $a, b, c\ldots$ seront aussi ceux dont les poulies mobiles se rapprocheraient des poulies fixes qui leur répondent (les cordons étant parallèles à la direction des puissances), et que ces rapprochements diminueraient la longueur de la corde qui les embrasse des quantités Pa, Qb, Rc, etc.; de sorte qu'à cause de la longueur invariable de la corde, le poids descendrait de la longueur $Pa + Qb + Rc$, etc.

Donc il faudra pour l'équilibre des puissances représentées par les nombres P, Q, R, etc., que l'on ait l'équation :

$$Pa + Qb + Rc\ldots = 0.$$

Ce qui est l'expression analytique du principe général des vitesses virtuelles.

Si la quantité $Pa + Qb + Rc\ldots$, au lieu d'être nulle, était négative, si les produits à soustraire étaient plus grands que ceux à ajouter, l'équilibre n'aurait pas lieu, puisqu'en prenant un déplacement virtuel complétement opposé de direction au premier, on trouverait une valeur positive pour le déplacement du poids.

Réciproquement, si l'équation ci-dessus est satisfaite pour tous les déplacements possibles infiniment petits du système, il sera nécessairement en équilibre ; car le poids demeurant immobile dans ces déplacements, les puissances qui agissent sur le système restent dans le même état pour des déplacements virtuels directement opposés deux à deux ; il n'y a donc pas plus de raison pour qu'elles produisent plutôt l'un que l'autre de ces deux déplacements. C'est le cas de la balance qui demeure en équilibre, parce qu'il n'y a pas plus de raison pour qu'elle s'incline d'un côté plutôt que de l'autre.

23. Le principe des vitesses virtuelles peut nous servir à retrouver les diverses propositions déjà établies, car, par sa généralité même, il se trouve comprendre tous les cas de l'équilibre.

Considérons le parallélogramme des forces.

Un point sollicité par deux forces sera en équilibre si on lui applique une force égale, et directement opposée à la résultante de ces deux forces. Supposons un déplacement virtuel r dans la direction de cette résultante R, on aura :

$$Rr = Pr \cos. \alpha + Qr \cos. \alpha' \text{ ou } R = P \cos. \alpha + Q \cos. \alpha',$$

expression qui représente la longueur de la diagonale du parallélogramme construit sur P et Q (fig. 20).

Fig. 20.

24. *Forces parallèles.* Soient P et Q deux forces parallèles, R une force égale et directement opposée à la résultante. Donnons un petit déplacement r dans la direction de ces forces, on devra avoir pour l'équilibre $Rr - Pr - Qr = 0$, ou $R = P + Q$.

Si P et Q sont de signes contraires, et $R = P - Q$.

Faisons tourner le système d'un petit angle ω autour du point d'application de la résultante ; p et q étant les distances du point d'application de la résultante aux points d'application des deux

forces P et Q, on aura, le déplacement de la force R étant nul :

$$Q q \omega - P p \omega = 0, \text{ ou } Q q = P p,$$

résultat trouvé art. 14.

25. Nous ne donnerons pas d'autres exemples de la fécondité des conséquences qu'on peut tirer d'un principe aussi général. Mais nous remarquerons que si on l'applique à un système non plus libre, mais qui ne puisse prendre que certains mouvements, les déplacements virtuels seront ces mouvements eux-mêmes, et les équations d'équilibre ne pourront être plus nombreuses que ceux-ci. Nous allons en voir l'application aux machines.

DES MACHINES.

26. On donne le nom de machine à tout système de corps destiné à transmettre le travail des forces, et par suite à modifier celles-ci quant à leur intensité, et le mouvement quant à la vitesse et à la direction en raison du but à atteindre.

Ce sont surtout les variations du chemin parcouru, objet spécial de ce traité, qui rendent les machines propres à une infinité d'usages industriels. Ces variations déterminées ne sauraient avoir lieu sur un corps entièrement libre, ne pouvant par suite qu'obéir aux forces qui agissent sur lui, que prendre le mouvement qui résulte de leur direction. C'est en gênant le mouvement d'un corps par des obstacles inébranlables, par des points fixes, que le travail des forces devient utilisable par machines, et que le mouvement est transformé de manière à satisfaire à toutes les conditions nécessaires pour le besoin des arts.

Que des points fixes transforment les mouvements d'un système qui sans eux se déplacerait sous l'action des forces qui y sont appliquées, cela est bien évident. Nous allons étudier bientôt ces transformations ; mais, auparavant, voyons comment ces points interviennent dans l'équilibre des forces qui agissent sur le système.

On comprend facilement comment, par l'intervention de points fixes, des forces de grandeurs quelconques peuvent se faire équilibre. Dans de pareils systèmes, il n'est plus nécessaire que les résultantes des forces qui agissent sur eux soient nulles d'elles-mêmes,

il suffit que leurs directions rencontrent les obstacles inébranlables qui les annulent par leur résistance.

Ainsi, à l'aide d'un corps solide qui s'appuie sur un point fixe, d'un levier, une force minime fera équilibre à une très grande force, si elle est disposée à l'égard de celle-ci de manière que la résultante des deux forces passe par le point fixe ; d'où l'on voit que la plus petite force ne détruit pas la plus grande, ce qui serait impossible, mais qu'elle ne sert en quelque sorte qu'à détourner l'effort de la plus grande et à la faire passer avec le sien propre combiné vers un obstacle invincible. Cet obstacle agit comme une force égale à la résultante et de sens opposé, et par suite en détruit l'effet.

Ainsi soit un levier AB sur lequel agissent deux forces parallèles P, Q ; supposons fixe le point C par lequel passerait leur résultante, ou tel que $P \times AC = Q \times BC$; il est évident que le levier ne prendra pas de mouvement, puisque le point d'appui fait équilibre à la résultante.

27. *Principe de la transmission du travail.* Lorsque le mouvement d'une machine devient uniforme, ce ne peut être que parce qu'aucune force nouvelle ne vient agir sur le système, ou plus généralement parce qu'en chaque instant les forces accélératrices et rétardatrices se font équilibre. Cette uniformité à laquelle arrive toute machine lorsqu'elle est en mouvement un temps un peu considérable, permet d'étudier les relations des forces qui agissent sur les machines à l'aide de l'important principe de la *transmission du travail*. Il consiste en ce que : *Quand une machine a pris un mouvement uniforme, le travail moteur est égal au travail résistant pour un même intervalle de temps.*

Ce principe n'est autre chose que l'expression de l'équilibre des forces motrices et résistantes, d'après le principe des vitesses virtuelles.

En effet, $P P' \ldots$ étant les puissances, $R R' \ldots$ les résistances, $p p' p''$ les éléments de chemins parcourus par les premières, $r\, r'\, r'' \ldots$ les chemins parcourus par les secondes, on aura pour l'équilibre entre les puissances et les résistances, $\Sigma P p = \Sigma R r$. Or, il faut remarquer que les vitesses virtuelles ne peuvent plus former qu'un seul système de valeurs, celui des seuls déplacements compatibles

avec les points fixes du système ; et que les termes Pp, Rr représentent le travail moteur et le travail résistant élémentaire des forces qui agissent sur la machine en mouvement. L'introduction de points fixes réduit donc à cette seule équation les conditions d'équilibre des forces dans les machines.

28. Le principe de la transmission du travail résulte clairement de la notion du travail, et de la manière dont le mouvement uniforme s'établit dans une machine.

Supposons, en effet, que des puissances agissent en certains points d'une machine et des résistances en d'autres points. Si la machine est d'abord au repos, il faut bien pour l'en faire sortir que le travail du moteur l'emporte sur celui de la résistance, sans quoi l'effet serait plus grand que la cause. Le mouvement se produit et s'accélère tant que la supériorité du travail élémentaire de la puissance sur celui de la résistance subsiste. Or, en même temps que la vitesse augmente, l'effort du moteur diminue tandis que les résistances deviennent croissantes. Par conséquent, pendant l'augmentation de vitesse de la machine, le travail élémentaire du moteur décroît, et celui des résistances croît de plus en plus. Lorsqu'ils sont égaux, ils se détruisent en chaque instant, et le mouvement demeure nécessairement uniforme : il n'existe plus de causes de retard ou d'accélération. Donc, quand le mouvement est uniforme, il y a égalité entre la somme du travail des forces motrices et la somme du travail des forces résistantes.

L'important principe de la transmission du travail exprimé par la relation ci-dessus est vrai, non seulement pour un mouvement uniforme, mais encore pour un mouvement périodique composé de périodes identiques entre elles, comme on le voit facilement en remplaçant les forces et les vitesses variables par leur valeur moyenne. Il est évident qu'il faudra dans ce cas considérer des périodes complètes pour égaler le travail moteur et le travail résistant.

Dans les chocs, il se produit des déformations, un travail de forces moléculaires qui apparaissent lors du choc, l'égalité ci-dessus ne peut plus alors être appliquée. On conçoit d'ailleurs qu'il y a toujours dans un choc consommation d'une partie du travail moteur.

Le travail résistant devra, dans la formule ci-dessus, compren-

dre non seulement le travail industriel utilement effectué par la machine, mais encore le travail de toutes les résistances passives, frottement, raideur des cordes, etc., que la mécanique enseigne à évaluer. Ces résistances dites passives ne prennent naissance que lors du mouvement, elles peuvent retarder et empêcher le mouvement, mais non le produire.

La relation $\Sigma P p = \Sigma R r$ est souvent employée sous une autre forme, pour bien distinguer le travail des diverses forces.

Soit T_m le *travail moteur* total transmis à la machine, T le *travail résistant principal*, ou celui consommé par l'opération industrielle que la machine est destinée à effectuer, et T′ le *travail résistant secondaire*, dû aux résistances propres de la machine, l'équation ci-dessus reviendra à $T_m = T + T'$ ou $T = T_m - T'$. La mécanique appliquée se propose de rendre T un maximum.

Il n'est pas besoin de remarquer que T′ ne pouvant jamais être nul, T ne saurait jamais être égal à T_m; une machine ne peut donc jamais rendre un travail égal au travail moteur; il n'y a donc pas de multiplication du travail, de mouvement perpétuel possible.

Le but des machines ne peut être que de transformer les facteurs du travail Pp... du moteur en des termes Rr... représentant le travail *utile* dont la somme approche le plus possible de celle du travail moteur, et dont les facteurs R ou r sont déterminés en raison du but à atteindre.

Du mouvement dans les machines.

29. Nous avons dit que les machines étaient des systèmes gênés par des obstacles, par des points fixes. Voyons comment l'introduction de ces points fixes modifie le mouvement d'un corps.

Soit un corps soumis à l'action de forces, et faisons croître le nombre de points fixes faisant obstacle à son mouvement; nous reconnaîtrons les trois cas suivants :

1° L'obstacle est *un point fixe;* le corps ne pouvant pas surmonter cet obstacle ne pourra que tourner en tous sens autour de ce point; c'est ce qui constitue la machine simple, appelée *levier*.

Le mouvement d'un point quelconque, appartenant au levier, sera évidemment *circulaire*, en chaque instant, et de plus *alternatif* dans une machine, le support matériel du point fixe s'opposant à ce qu'il puisse être continu dans le cas général.

2° L'obstacle consiste en *deux points* ou une *droite fixe;* dans le cas général où la résultante de toutes les forces agissant sur le corps ne passera pas par cette droite, il se produira un mouvement de rotation autour de celle-ci, un *mouvement circulaire* continu. Le *tour* est la machine simple, type du mouvement circulaire.

3° L'obstacle consiste *en trois points* fixes ou un *plan inébranlable* passant par ces trois points. Dans le cas général, le corps se mouvra suivant un élément linéaire de ce plan, ne pouvant déplacer les obstacles inébranlables.

Le mouvement ayant lieu en chaque instant suivant un élément linéaire de ce plan, l'ordre de la succession de ces éléments déterminera le *mouvement rectiligne ou suivant une courbe donnée.*

Le *plan incliné*, ainsi nommé parce qu'on considère le plus souvent le plan fixe supportant des corps pesants et inclinés à l'horizon, est la machine simple type de ce genre de mouvement.

Le nombre de points fixes, non en ligne droite, peut être plus grand que trois; mais il n'en résulte pas de nouveau genre de mouvement. En effet, trois points fixes déterminant, pendant un instant, le mouvement le long du plan passant par ces trois points, soit par glissement seulement, soit par glissement et roulement sur ce plan (comme nous le dirons plus loin), c'est-à-dire par la réunion d'un des systèmes précédents et du système plan, il s'ensuit qu'un plus grand nombre de points ne déterminera pas la nature du mouvement en chaque instant plus que trois points; si d'autres points fixes sont convenablement disposés pour permettre le mouvement, ils pourront seulement servir à déterminer la direction du mouvement élémentaire, fournir des guides courbes, par exemple. Un nombre de points plus grand que trois ne sert donc qu'à assurer les formes particulières du mouvement dans un même plan, ou dans des plans successifs, mais ne fournit pas de système nouveau. De ceci résulte une importante conséquence, c'est que les seules machines simples

sont : le levier, le tour et le plan, et que si l'on décompose en leurs derniers éléments les systèmes complexes appelés machines, ces derniers éléments seront nécessairement un de ces systèmes.

30. Quant aux mouvements produits, on déduira encore cette conséquence non moins essentielle, que puisque les obstacles qui gênent le mouvement des systèmes de corps, qui constituent les machines, ne peuvent fournir que l'un des trois systèmes précédents, les mouvements produits sont nécessairement ceux engendrés dans le genre *levier,* ou dans le genre *tour,* ou dans le genre *plan,* en comprenant dans ce dernier les successions de plans, les surfaces courbes, etc. Par suite, les mouvements élémentaires seront tous ou circulaires alternatifs, ou circulaires continus, ou enfin rectilignes ; la succession des éléments linéaires pouvant d'ailleurs engendrer le mouvement suivant une courbe, et par suite les rectilignes alternatifs.

On doit entrevoir, dès à présent, combien cette observation va simplifier l'étude de la Cinématique. Les machines n'étant plus composées que d'un nombre d'éléments très limité quant à leur mode de mouvement, il n'y aura plus qu'à étudier les combinaisons de ces éléments, pour en arriver promptement à comprendre les machines les plus compliquées, au lieu d'être contraint d'étudier celles-ci successivement et comme des systèmes n'ayant aucun rapport entre eux. Il en résulte, en un mot, la possibilité de constituer sur des théories élémentaires l'étude géométrique des machines.

Des Machines simples.

Équilibre dans ces machines et guides de mouvement.

31. Un élément de machine ne pouvant être, à un instant donné, qu'un des trois systèmes : levier, tour ou plan, ou une combinaison de ces systèmes, il importe d'étudier ces systèmes élémentaires, appelés habituellement *machines simples,* que nous allons rencontrer à chaque pas. Nous étudierons d'abord, pour chacun de ces systèmes, les directions et l'étendue des chemins parcourus par les points des corps que l'on transforme en ces systèmes. Cette transformation s'effectue à l'aide d'obstacles, qui prennent le nom de

guides, et qui déterminent la nature du mouvement des organes élémentaires.

1° *Système levier* (*Obstacle*, 1 *point fixe*).

Dans un levier, c'est-à-dire un corps oscillant autour d'un point fixe, d'un mouvement de va-et-vient puisqu'il faut bien que le point fixe soit supporté par une base qui rende le mouvement continu généralement impossible, le chemin E, parcouru en un instant par le point d'application de la force, agissant à une distance R du point fixe, sera un petit élément circulaire, donc $E = R\omega$, ω étant l'angle au centre que parcourt la ligne R, le mouvement se faisant sur une sphère dont le point d'oscillation est le centre. Pour un point quelconque, situé à une distance r de ce centre, l'espace parcouru pendant le même temps sera $r\omega$ ou $E\frac{r}{R}$, puisque $\omega = \frac{E}{R}$.

Équilibre sur le levier. Le mouvement étant devenu uniforme, le travail moteur et le travail résistant sont égaux. Si donc nous considérons, dans le cas général, les deux forces P et Q, de direction quelconque, agissant sur un levier de forme quelconque, on aura, d'après le principe de la transmission du travail pour un mouvement élémentaire correspondant à un petit angle au centre ω, $Pl \cos. \alpha\omega = Q l' \cos. \alpha'\omega$ (fig. 21), l et l' étant les longueurs des

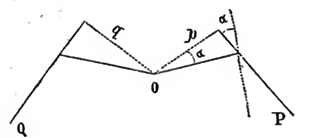


Fig. 21.

bras du levier, mesurées du centre d'oscillation au point d'application des forces, $\alpha \alpha'$ les angles des chemins parcourus avec la direction des forces. Or, ces chemins étant de petits arcs de cercle décrits du point o qui se confondent avec des perpendiculaires à la direction des bras du levier, si on abaisse les perpendiculaires p et q du centre o sur les directions des forces, on aura $l \cos. \alpha = p$, l'

cos. $\alpha' = q$, d'où $Pp = Qq$, relation déjà trouvée pour le cas des forces parallèles.

L'équilibre ne pouvant avoir lieu qu'autant que la résultante passe par le point d'appui, il faut donc, en outre de la relation précédente : 1° Que les deux forces soient dans un même plan, condition nécessaire pour qu'elles aient une résultante unique ; 2° que le point d'appui soit aussi dans ce plan qui renferme la résultante ; 3° enfin il faut que les forces P et Q tendent à faire tourner le levier en sens contraire, autrement le travail de l'une d'elles ne pourrait être soustrait du travail de l'autre, et la condition $Pp + Qq = 0$ ne pourrait être satisfaite.

Enfin, la charge du point d'appui étant précisément la résultante des forces qui agissent sur le système (y compris la pesanteur, si l'on veut tenir compte du poids du levier), on voit qu'elle s'obtiendra facilement, en transportant en ce point toutes les forces parallèlement à elles-mêmes et en prenant leur résultante.

32. *Guides du levier*. Le guide du système levier devrait consister en un assemblage du corps avec une masse fixe en un point unique, autour duquel le levier pourrait prendre des inclinaisons quelconques. Théoriquement cet assemblage, ou plutôt un assemblage équivalent, n'est pas tout à fait impossible. Si l'on suppose la barre du levier pénétrée par une petite sphère fixe, et que le contact ait lieu au moins en quatre points, qui seraient comme les quatre points de contact d'une pyramide circonscrite à sa surface, le levier, en tournant autour de cette sphère, pourrait être considéré comme s'il tournait autour de son centre, qui deviendrait le centre d'oscillation du levier en tous sens.

Cette disposition est réalisée à peu près dans quelques instruments de nivellement (fig. 22), dans lesquels de très petites forces sont en jeu.

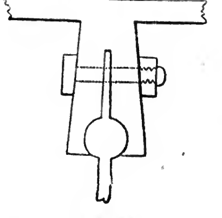


Fig. 22.

Dans le cas le plus général, il est inutile de donner au levier la faculté de pirouetter dans tous les sens, et il suffit de le faire mouvoir dans un seul plan. On le traverse alors par un petit axe per-

pendiculaire au plan du mouvement, que l'on guide de la même manière que dans le cas du tour que nous allons examiner. Le levier se meut alors en réalité autour d'une droite ; mais on distinguera toujours facilement si un système est originairement de l'ordre du levier ou de l'ordre du tour, par la continuité du mouvement dans un même sens qui est le caractère propre de ce dernier.

2° *Système tour* (*Obstacles, 2 points fixes*).

33. Si l'on rend fixes deux points d'un corps, il ne peut plus se mouvoir qu'autour de la ligne qui passe par ces deux points. Tel est le *tour*, type de tout système possédant un mouvement circulaire continu.

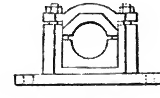
Tous les points du système décrivant des circonférences dont les centres sont sur l'axe, et tournant en même temps d'angles égaux, on aura pour relations des chemins E, e, parcourus en même temps par des points placés sur des circonférences des rayons R et r, $\frac{e}{E} = \frac{r}{R}$, et pour des tours entiers, $\frac{e}{E} = \frac{2\pi r}{2\pi R}$.

Equilibre sur le tour. Lorsque le mouvement est uniforme, si deux forces P et Q perpendiculaires à l'axe (ou seulement leurs composantes perpendiculaires, qui seules peuvent produire une rotation, les autres produisant une pression le long de l'axe et étant par suite détruites par la résistance des points fixes ; ce qui équivaut, dans le calcul du travail, à estimer le chemin suivant la direction des forces réelles) agissent tangentiellement à deux circonférences de rayons R et r, on aura pour un petit angle de rotation ω $PR\omega = Qr\omega$ ou $PR = Qr$, ou en général, s'il y a plus de deux forces, $PR + QR' + SR'' .... = 0$.

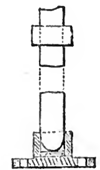
Il n'est pas nécessaire dans ce cas, comme pour le levier, que les deux forces P et Q soient dans un même plan. Leurs composantes situées dans des plans perpendiculaires à l'axe produisent la même rotation, à quelque point que ces plans rencontrent l'axe ; on peut donc toujours les considérer comme si elles étaient transportées dans un même plan perpendiculaire à l'axe.

La pression sur les points d'appui sera celle fournie par la résultante des forces agissant sur le système qui passera par l'axe, puisqu'il y a équilibre parce que cette résultante est détruite par la résistance de l'axe. On pourra donc transporter sur celui-ci les forces du système parallèlement à elles-mêmes; leurs composantes perpendiculaires à l'axe donneront la pression exercée transversalement, les composantes parallèles à l'axe la pression dans le sens de sa longueur.

34. *Guides. Axe horizontal.* Les guides les plus usités du système tour sont les coussinets (fig. 23) qui entourent l'axe et ne peuvent lui laisser prendre aucun autre mouvement que le circulaire, tant parce que la pression de la partie supérieure du coussinet sur la partie inférieure empêche tout déplacement perpendiculairement à l'axe, que parce qu'il est réduit à un diamètre moindre dans la partie qui entre dans le coussinet, partie qu'on appelle *tourillon,* d'où résulte, près de celui-ci, un épaulement qui empêche le déplacement latéral. Le diamètre de l'arbre doit être le moindre possible eu égard aux forces à transmettre, pour que le chemin parcouru par les résistances dont nous allons parler soit d'autant moindre pour chaque tour. Il faut deux coussinets pour guider un axe horizontal.

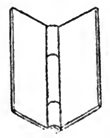

Fig. 23.

Axe vertical. Pour un axe vertical on emploie un collet et un pivot reposant sur une crapaudine (fig. 24). En faisant ces deux dernières parties de corps très durs, on peut diminuer beaucoup les surfaces frottantes et supporter l'axe seulement par une petite surface.

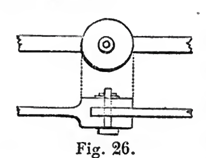

Fig. 24.

Les pivots sont peu employés pour les axes horizontaux, parce qu'ils ne sauraient empêcher leur soulèvement.

Pour des pièces très légères, on emploie la disposition bien connue, appelée charnière (fig 25). Elle est à peu près la


Fig. 25.

même que celle des articulations qui conviennent parfaitement dans la pratique.


Fig. 26.

Celles-ci consistent habituellement dans une pièce double en forme de fourche, qui reçoit à l'intérieur l'extrémité saillante d'une autre pièce (fig. 26). A travers toutes deux est percé un trou que vient traverser un boulon qui devient l'axe de rotation autour duquel les pièces peuvent tourner.

3° *Système plan (Obstacles,* 3 *points fixes).*

35. Lorsqu'un corps solide rencontre trois points fixes, ou un plan inébranlable passant par ces trois points, le mouvement du corps ne peut avoir lieu que de deux manières :

1° Les forces agissant sur le corps ayant une résultante unique, la direction de celle-ci passera dans l'intérieur du triangle formé par les trois points fixes; le corps ne pouvant détruire les obstacles. inébranlables, ne pourra se mouvoir que le long de ceux-ci, c'est-à-dire glisser le long du plan déterminé par ces trois points.

2° Les forces agissant sur le corps n'ont pas de résultante unique, ou la résultante passe extérieurement au triangle formé par les trois points d'appui, et alors le corps glisse et roule en même temps sur le plan. Ce mouvement de roulement n'est pas employé dans les machines, au moins produit ainsi que nous le supposons ici, c'est-à-dire en rendant libre un corps qui causerait un choc à l'extrémité de sa course, et par suite une destruction de travail.

Nous verrons bientôt que c'est surtout dans des guides de mouvement rectiligne qu'on emploie le roulement le long d'un plan, mais en tous cas le mouvement que nous considérons ici n'est que la combinaison du mouvement fourni par le système plan en général, combiné avec le mouvement de rotation du système tour, puisqu'en chaque instant la rotation se produit autour d'un axe, et se combine avec une translation.

Nous pouvons donc négliger dans l'étude des mouvements élémentaires simples ce second cas, et nous en tenir seulement au premier, au cas du transport le long du plan.

36. *Équilibre sur le plan.* Considérons le cas de deux forces P et Q concourantes (fig. 27) qui agissent sur un corps prismatique placé sur un plan, dont les points d'application parcourent le même chemin, celui parcouru par le corps même en ligne droite, et qui font avec celui-ci des angles α et β. Ce corps sera pressé par les deux composantes P sin. α + Q sin. β qui seront détruites par la résistance du plan, et le mouvement le long du plan sera produit par deux composantes P cos. α et Q cos. β. Le mouvement uniforme ou l'équilibre des forces agissantes exigera donc la relation P cos. α = Q cos. β.

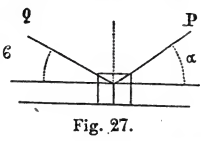


Fig. 27.

Donc pour qu'il y ait équilibre sur le plan, il faut que la relation précédente ait lieu, que la résultante normale au plan exerce une pression et non une traction, auquel cas le plan n'intervient plus, enfin que la forme du corps soit telle que la résultante des pressions ne rencontre pas le plan en dehors des points d'appui du corps.

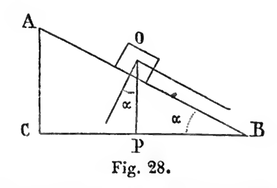


Fig. 28.

Si l'une des forces P représente le poids du corps (fig. 28) agissant verticalement, α l'angle que forme le plan avec l'horizon, cet angle est égal au complément de celui de la pesanteur et du plan, la relation ci-dessus devient P sin. α = Q cos. β.

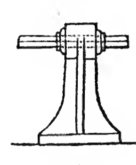
Si la force Q est horizontale $\beta = \alpha$ angle de l'inclinaison du plan, et la relation précédente devient P sin. α = Q cos. α ou $\frac{Q}{P} = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \text{tang.}\ \alpha$, c'est-à-dire que la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan est à la base.

37. *Guides du mouvement dans le système plan.* Le mouvement produit dans le système que nous considérons, se produisant

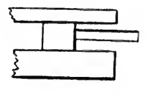
en chaque instant suivant un élément linéaire, suivant la direction d'éléments successifs du plan, le mouvement sera ou rectiligne ou d'après une courbe donnée. Parmi ces cas, le rectiligne est le principal, et celui dont nous nous occuperons surtout ici.

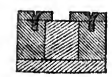
38. 1° *Mouvement rectiligne.* En général, la pièce mouvante, dont la forme est telle que des sections perpendiculaires à la direction du mouvement soient toujours de dimensions constantes, est plus ou moins enveloppée par des parties fixes, dont l'assemblage laisse un vide de même section que celle de la pièce mouvante, et qui empêchent toute action latérale. Ces ajustements sont trop simples et leur nombre trop considérable pour qu'il y ait intérêt à s'y arrêter longuement. Nous dirons seulement que dans l'établissement de ces guides, on doit : 1° envelopper le plus complétement possible la pièce mouvante pour éviter les déviations ; 2° guider surtout avec soin les extrémités de la pièce mouvante prolongée autant que possible, afin de diminuer l'obliquité qui résulte toujours du jeu nécessaire à un mouvement facile.

Les guides causant toujours une perte de force notable par suite du frottement, résistance que nous allons bientôt étudier, il faut rendre celui-ci aussi faible que possible, en ayant soin de le faire naître entre parties très polies et très dures. Tels sont les glissoirs (fig. 30 et 31), où les parties frottantes sont en acier trempé pour des pièces prismatiques, des trous alésés avec soin (figure 29) pour des pièces cylindriques.


Fig. 29.

Le système employé dans tous les cas revient à faire mouvoir la pièce à génératrices rectilignes entre quatre plans, ou au moins

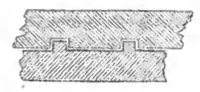

Fig. 30.

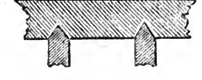

Fig. 31.

entre quatre arètes parallèles à ces génératrices et placées dans

quatre plans perpendiculaires entre eux, de manière que, quelle que soit la direction des résultantes des forces qui agissent sur la pièce mouvante, elle se meuve toujours suivant un élément linéaire du plan sur lequel elle s'applique, en s'appuyant sur des lignes droites parallèles d'un ou deux plans perpendiculaires au premier.

39. Dans certains cas, les plans qui servent de guides sont continus et se prolongent sur une grande longueur ; dans d'autres ils sont interrompus. Nous donnerons comme exemple du premier cas


Fig. 32.


Fig. 33.

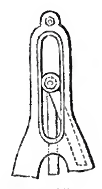
les bâtis (fig. 32 et 33) sur lesquels glissent les chariots des machines-outils, qui sont trop pesants pour que la résultante des forces qui agissent sur le système puisse être dirigée de bas en haut.

Comme exemple du second système, nous citerons les guides analogues à ceux des pilons appelés quelquefois des *prisons* (fig. 34).


Fig. 34.

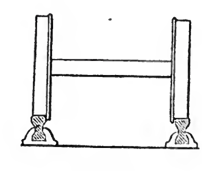
Ce sont deux guides formés de quatre plans à angle droit qui embrassent la tige prismatique du pilon, et qu'on a soin d'écarter le plus possible l'un de l'autre pour diminuer l'inclinaison absolue qui résulte toujours du faible jeu qu'il faut laisser dans les guides pour les imperfections de l'exécution et la facilité du mouvement.

40. *Guides à mouvement circulaire.* Nous avons dit que le mouvement de translation le long d'un plan pouvait se produire en même temps qu'un mouvement de rotation. Ainsi lorsqu'une roue roule sur un plan, son axe est mu d'un mouvement de translation. Ce système offre de grands avantages, comme nous le reconnaîtrons bientôt, et doit être employé toutes les fois que la chose est possible.


Fig. 35.

La fig. 35 représente une disposition de ce genre. La pièce mobile est munie d'une roulette ou galet dont la gorge embrasse un plan fixe le long duquel elle se meut, et que ses rebords l'empêchent d'abandonner.

Au lieu d'une seule roue, si on en emploie deux, il suffit d'adapter à chacune d'elles un rebord intérieur pour que toute déviation soit impossible pour des pièces pesantes ; telle est la disposition des chemins de fer à bandes saillantes avec roues à rebords intérieurs (fig. 36). Leur emploi est fréquent aujourd'hui dans les machines.


Fig. 36.

L'emploi des galets comme guides du mouvement rectiligne a un inconvénient notable, c'est que quand les forces mises en jeu sont considérables le contour des galets s'altère par l'usure, le galet devient plan en certaines parties et bientôt ne tourne plus.

41. *Articulations.* Quand le mouvement rectiligne est de faible étendue, on peut remplacer les guides du mouvement rectiligne par le guide du mouvement circulaire, et pour cela assujettir la barre BD (fig. 37), qui doit être guidée en ligne droite, à se mouvoir sur une circonférence de rayon r. Si ce rayon est suffisamment grand par rapport à l'étendue du mouvement rectiligne, le mouvement produit en réalité pourra ne différer d'un mouvement rectiligne que d'une quantité négligeable dans la pratique. En effet, appelant l l'étendue de ce mouvement ($\frac{1}{2}l$ de chaque côté de la position moyenne AB), on aura pour l'écart extrême du mouvement circulaire et du mouvement rectiligne $r - r\cos.\alpha = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}l^2}$, l étant supposé très petit par rapport à r, $\frac{1}{4}l^2$ pourra être négligeable par rapport à r^2 et l'élasticité des pièces, le jeu des articulations compenser la petite quantité négligée.

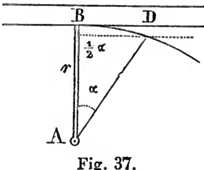


Fig. 37.

Nous verrons plus tard comment en multipliant des systèmes du genre de celui-ci, on peut guider en ligne droite des mouvements d'une notable étendue, en n'employant que des systèmes articulés.

42. 2° *Mouvement d'après une courbe donnée.* Pour guider un corps et le forcer à suivre une courbe déterminée, on l'oblige en général à l'aide d'une cheville où d'une espèce de fourche qui lui est adaptée à suivre le contour de la courbe voulue, tracée soit en creux, soit en relief. En imprimant au corps un mouvement soit circulaire, soit rectiligne, ce mouvement est transformé par les rainures en mouvement d'après la courbe voulue.

Si le mouvement à obtenir devient le circulaire, nous rentrons dans le cas précédent, c'est-à-dire qu'on peut remplacer la courbe par les guides d'un axe. Telle est la disposition employée (fig. 38) pour scier les jantes des roues circulairement. La pièce de bois est placée sur un plateau circulaire pour être soumise à l'action de la scie, et à mesure que le plateau tourne par l'action de chaînes, la scie débite les jantes circulairement.

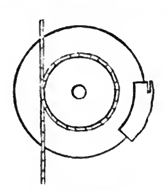


Fig. 38.

Nous ne nous arrêterons pas à des exemples particuliers de mouvements par des courbes, nous trouverons plus loin des exemples de ce genre de mouvement presque toujours limité aux opérateurs à cause des résistances considérables qui s'y produisent.

43. *Mouvements parallèles.* Lorsque la condition du mouvement est que le corps reste parallèle à lui-même, dans son mouvement, on peut employer l'une des deux dispositions suivantes:

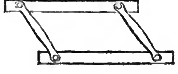
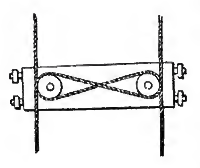


Fig. 39.

1° L'*appareil dit des règles parallèles* (fig. 39), composé de deux règles réunies par deux traverses égales et parallèles, pouvant tourner autour de points fixes. Les deux points d'articulation de la barre mobile décrivent deux circonférences égales, la deuxième ligne reste constamment parallèle à


Fig. 40.

la première, la figure étant toujours un parallélogramme.

2° L'*appareil des Mull-Jenny* (figure 40), qui a satisfait complétement au problème difficile de faire mouvoir un chariot dans un parallélisme parfait avec un bâti fixe dans l'appareil, dit *Mull-Jenny*. Le chemin de fer sur lequel se meut le chariot ne le guidant pas d'une manière suffisamment exacte dans la pratique, deux cordes tendues dans une direction parallèle à celle du mouvement sont enroulées autour de deux poulies fixées invariablement au chariot, de manière à décrire chacune un Z. La tension des cordes croîtrait rapidement par la moindre obliquité, chacune ne pouvant permettre une déviation dans un sens que si elle changeait de longueur.

Aucun jeu n'a plus lieu dans ce système, lorsque les cordes sont convenablement tendues, et les résultats de cet appareil sont d'une merveilleuse exactitude.

Des Résistances passives.

44. Nous avons vu qu'en appelant T_m le travail du moteur qui agit sur une machine, T le travail utile, le travail industriel qu'effectue la machine, on pouvait poser l'équation $T_m = T + T'$, T' étant le travail consommé par la machine même, la perte de travail que causent les résistances propres à son mouvement. La plus importante cause de perte de travail, celle qu'il est le plus nécessaire d'étudier, afin de rendre le terme T un maximum pour une valeur donnée de T_m, est le frottement.

Frottement.

Toutes les fois qu'un corps se meut en glissant sur un autre, il se produit une résistance qui s'oppose au mouvement, et que l'on nomme *frottement de glissement*. Il est dû à l'action réciproque des molécules des deux corps qui engrènent en quelque sorte, et aux forces dites moléculaires qui se trouvent mises en

jeu. On a reconnu par des expériences très précises que cette résistance est assujettie à trois grandes lois :

1° *Le frottement est proportionnel à la pression,* c'est-à-dire que la résistance est toujours une même fraction de la pression qui applique un corps sur l'autre, ce qui se comprend assez bien, puisque les actions moléculaires doivent naître en raison de cette pression.

2° *Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact,* c'est-à-dire que quand cette étendue augmente sans que la pression change, la résistance totale reste la même, bien que la pression sur chaque élément se trouve diminuée en raison inverse de l'étendue même des surfaces. Puisque pour des substances données le frottement est une fraction constante de la pression, il en résulte qu'un même corps pesant traîné sur un plan donne toujours lieu à la même résistance sur quelque face qu'il soit posé.

3° *Le frottement est indépendant de la vitesse du mouvement,* c'est-à-dire qu'il faudra une même quantité de travail pour faire parcourir à un corps une longueur déterminée, en surmontant le frottement, quelle que soit la vitesse du mouvement.

A l'aide de ces trois lois fondamentales et des valeurs du rapport du frottement à la pression, en raison de la nature des surfaces en contact, déduit des résultats de l'expérience, on peut dans tous les cas évaluer le travail consommé par le frottement. C'est ce que nous allons faire pour le cas des machines simples, mais auparavant disons quelques mots d'un autre genre de frottement.

45. *Frottement de roulement.* Lorsqu'une roue roule sur un plan, il se développe au contact un frottement d'une nature particulière, dit frottement de roulement. Sa valeur est en raison inverse du diamètre de la roue, et, pour les matériaux employés dans les machines, assez faible pour être toujours négligeable auprès du frottement de glissement.

FROTTEMENT DANS LES GUIDES DE MOUVEMENT.

46. De ce que les guides de mouvement se réduisent pour chaque élément de machine à ceux des trois machines simples : *levier,*

tour et *plan*, il faut, pour pouvoir comparer dans les applications lequel de ces systèmes est préférable pour un cas déterminé, évaluer les résistances qui naissent dans chacun d'eux.

Quand on considère les systèmes *levier*, *tour* et *plan*, indépendamment des réactions de la matière, comme des abstractions mathématiques, ils sont tous également parfaits, et ils transmettent intégralement le travail d'un organe d'une machine à un autre organe, d'après le principe de la transmission du travail; mais évidemment on néglige ainsi une partie de la question, celle qui se rapporte à la nature physique des corps. Pour que les résultats déduits de l'étude théorique aient une valeur d'application, il faut aussi étudier cet élément, qui permettra de choisir entre plusieurs organes, celui qui entraîne les moindres résistances. C'est à quoi l'on parvient, au moins pour la plus grande partie, en tenant compte du frottement, la plus importante et la plus générale des résistances passives. Il naît entre deux surfaces en contact, lorsque l'une de ces surfaces vient à se mouvoir; est, comme nous l'avons dit, proportionnel à la pression, et son rapport avec celle-ci ne varie qu'avec la nature des surfaces en contact.

47. Nous allons chercher à calculer le travail du frottement dans chacune des machines simples. Définissons d'abord l'angle du frottement.

Soit un corps reposant sur un plan horizontal, si on incline peu à peu ce plan à l'horizon, il arrivera un point où le corps se mettra en mouvement. Soit P le poids du corps (figure 41), α l'angle du plan incliné avec l'horizon quand le mouvement a lieu; la pesanteur de P se décompose en deux forces :

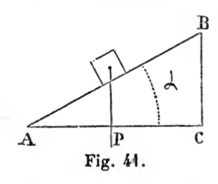


Fig. 41.

P sin. α suivant la direction du plan incliné et P cos. α perpendiculairement à ce plan.

La première force est celle qui détermine le corps à glisser; elle détruit la résistance provenant du frottement; elle est donc égale au frottement F; donc $F = P \sin. \alpha$.

La deuxième composante exprime la pression Q que le corps exerce sur le plan; donc $Q = P \cos. \alpha$.

On a donc $\frac{F}{Q} = \frac{P \sin. \alpha}{P \cos. \alpha} = \text{tang. } \alpha$.

On reconnaît en variant arbitrairement l'étendue de la surface en contact et le poids du corps, que l'angle d'inclinaison ne varie pas pour une même substance. D'où la loi établie : *Que le frottement est proportionnel à la pression.*

Cet angle α s'appelle l'angle du frottement, et le rapport du frottement à la pression égal à tang. α est le coefficient du frottement, représenté habituellement par la lettre f.

Nous donnons ici le coefficient et l'angle du frottement pour les diverses natures de surfaces qui se rencontrent dans les machines, dans leur état le plus ordinaire de poli.

SUBSTANCES EN CONTACT.	RAPPORT du FROTTEMENT à la pression.	ANGLE du FROTTEMENT.
Bois sur bois, à sec.	0,36	$19° \frac{3}{4}$
Id., avec enduit gras. .	0,07	4°
Bois et métaux, à sec.	0,42	$22° \frac{3}{4}$
Id., avec enduit gras.	0,08	$4° \frac{1}{2}$
Métaux sur métaux, à sec.	0,19	$10° \frac{3}{4}$
Id., avec enduit gras.	0,09	5°
Cuir sur bois ou métal, à sec. . .	0,30	$16° \frac{3}{4}$
Id., avec enduit.	0,20	$11° \frac{1}{4}$

On voit que le frottement est d'autant moindre qu'il s'exerce entre corps plus durs. Quand des substances grasses sont interposées entre deux surfaces, celles-ci ne sont plus en contact immédiat, les molécules des corps gras sont comme de petites sphères qui roulent entre les deux corps.

Frottement dans le système plan.

Nous étudierons d'abord le frottement dans le système plan, parce que les autres cas s'en déduisent facilement.

48. Considérons un corps glissant d'un mouvement uniforme

sur un plan incliné. Il y a alors équilibre en chaque instant entre les forces qui agissent sur le corps et les résistances, la réaction du plan. Les points d'application des forces décrivant des chemins égaux, l'égalité du travail exige dans ce cas l'égalité des forces. En outre, ces forces ont une résultante unique R, condition essentielle de l'équilibre.

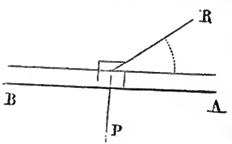


Fig. 42.

Soit γ (fig. 42) l'angle que fait cette résultante avec la normale au plan. Elle peut se décomposer en deux autres forces : R cos. γ, R sin. γ, la première normale, la seconde parallèle au plan.

La première force R cos. γ, exerce une pression sur le plan et produit le frottement, lequel est proportionnel à cette pression, et a pour valeur f R cos. γ, f étant le coefficient du frottement. Cette force du frottement agit comme une force résistante parallèlement au plan dans une direction opposée à celle du mouvement du corps.

La deuxième composante de la force R, qui a pour valeur R sin. γ, est la force qui produit le mouvement. C'est donc cette force qui fait équilibre au frottement, on a donc :

$$R \sin.\gamma = f R \cos.\gamma \text{ ou } \operatorname{tang}.\gamma = f.$$

Or, nous avons trouvé tang. $\alpha = f$, α étant l'*angle du frottement*. *Donc la résultante* R *qui agit sur le corps de manière à lui imprimer un mouvement uniforme, fait avec la normale au plan un angle égal à l'angle du frottement.* Cette résultante peut être considérée comme égale et opposée à la réaction du plan, qui la détruit en chaque instant, et l'on peut dire que *la réaction du plan fait toujours avec la normale un angle égal à l'angle du frottement*; cette réaction étant la résultante de forces égales et opposées à la pression et au frottement.

Si la résultante R faisait avec la normale un angle plus petit que l'angle du frottement, le corps ne pourrait plus éprouver de déplacement, car on aurait tang. $\gamma <$ tang. α ou R sin. $\gamma < f$ R cos. γ, c'est-à-dire que la force qui tendrait à faire glisser le corps serait plus petite que la force du frottement qui tendrait à l'empêcher de glisser.

Si, au contraire, la résultante R faisait avec la normale au plan un angle plus grand que l'angle du frottement, on aurait :

$$\text{Tang. } \gamma > \text{tang. } \alpha \text{ ou R sin. } \gamma > f \text{ R cos. } \gamma.$$

Alors, la force qui tend à faire glisser le corps étant toujours plus grande que la force de frottement qui tend à le retenir, le mouvement serait accéléré.

49. Quant au travail du frottement sur le plan, il est dans tous les cas pour un chemin parcouru l, f R cos. γ l, en faisant entrer dans la détermination de R la pesanteur et toutes les forces qui agissent sur le corps, et en ayant soin de prendre comme positives toutes celles qui tendent à presser le corps sur le plan, et comme négatives celles qui tendent à l'en éloigner. Si γ est égal à 100°, si la résultante est normale au plan, cos. $\gamma = 1$ et le frottement devient fRl.

La comparaison de cette expression du travail du frottement avec celles que nous allons trouver pour les autres machines simples, fera bien sentir combien les guides plans sont désavantageux dans la pratique.

Mais auparavant considérons encore le cas où la force motrice P est horizontale ou perpendiculaire à la résistance, que nous suppo-

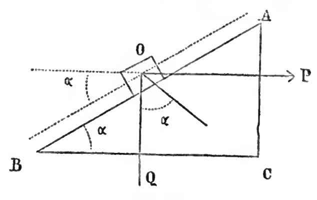


Fig. 43.

serons ici le poids du corps Q (fig. 43), c'est-à-dire verticale ; nous aurons, en égalant la valeur du frottement et la force qui lui fait équilibre, c'est-à-dire la somme des composantes parallèles à AB :

$$f\,(\text{P sin. } \alpha + \text{Q cos. } \alpha) = \text{P cos. } \alpha - \text{Q sin. } \alpha\,;$$

$$\text{d'où P} = \text{Q}\,\frac{f \text{ cos. } \alpha + \text{sin. } \alpha}{\text{cos. } \alpha - f \text{ sin. } \alpha} = \text{Q}\,\frac{\text{tang. } \alpha + f}{1 - f \text{ tang. } \alpha}$$

Nous verrons plus loin l'usage de cette formule pour évaluer le frottement de la vis.

50. *Pièce prismatique maintenue par des guides.* On peut obtenir la valeur du travail du frottement dans ce cas du système plan par une construction géométrique simple. Considérons, par exemple, une pièce AB (fig. 44) qui s'élève verticalement et d'un mouvement uniforme entre des guides plans placés en m et m' sous l'action :

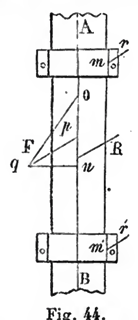


Fig. 44.

1° D'une force mouvante F dont la direction rencontre en o l'axe AB de la pièce ; 2° d'une résistance verticale P. ; 3° des réactions r, r', exercées par les guides.

Chacune de ces réactions fait, avec la normale à la face de contact correspondante, un angle égal à l'angle du frottement. Les deux guides étant de même substance, ces deux forces rr' seront parallèles et auront une résultante unique R. Les trois forces F, P, R, qui agissent sur la pièce AB se faisant équilibre, si l'on trace un triangle dont les côtés soient parallèles aux directions de ces forces, ces côtés seront proportionnels à leurs grandeurs.

Prenons sur A B, à partir du point o, une longueur op pour représenter la force P, et menons par le point p une parallèle aux forces r et r', elle rencontrera la ligne menée par le point o, parallèle à la force F en un point q, et pq représentera la résultante de la réaction des guides.

Pour obtenir le rapport qui existe entre le travail de F et le travail de P, remarquons que le travail de F se réduit au travail de sa projection sur la direction AB du chemin décrit. Abaissons qn perpendiculaire à AB, et remarquons que les travaux des forces représentées par on et op, sont entre eux comme ces forces, puisque le chemin est le même pour chacune, nous aurons donc :

$$\frac{\text{Travail de F}}{\text{Travail de P}} = \frac{on}{op} = \frac{op + pn}{op} = 1 + \frac{pn}{op}$$

$$\text{De même } \frac{\text{T. R}}{\text{T. F}} = \frac{pn}{op}$$

Le travail du frottement, de la résistance nuisible sera donc

d'autant plus petit que pn sera plus petit, c'est-à-dire que la direction de la force F se rapprochera davantage d'être parallèle à AB. A cette limite, pn devient nul et aussi le frottement, ce qui est évident *à priori*.

Frottement dans le système tour.

51. On doit distinguer deux cas suivant que les axes de rotation sont terminés par des *tourillons* ou des *pivots*. Nous avons décrit ces deux dispositions, cherchons à évaluer le frottement dans chacune d'elles.

Pivot. Considérons un pivot pressé par une force N contre sa crapaudine, force que nous supposerons agissant dans la direction de l'axe. Puisque cette force N (fig. 45 et 46), perpendiculaire à la

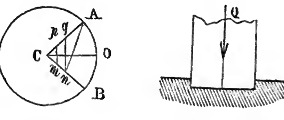


Fig. 45. Fig. 46.

surface pressée, passe par le centre du cercle du pivot, il est permis de la regarder comme la résultante de toutes les pressions partielles qui ont lieu sur tous les éléments de la base, de sorte qu'elle est répartie proportionnellement sur tous les points de cette surface. Ainsi, en désignant par a un petit élément, et par A cette surface, $\frac{aN}{A}$ sera évidemment la partie de la pression que supporte cet élément, et $f\frac{aN}{A}$ le frottement qui s'exerce sur cet élément.

Ce frottement agira comme une force appliquée au centre de cet élément et dans une direction directement contraire à celle du mouvement du pivot, c'est-à-dire perpendiculairement au rayon du cercle décrit par ce centre autour du centre du pivot. Si donc on appelle r ce rayon, le travail du frottement de cet élément, pour un petit angle de rotation ω, sera $f\frac{aN}{A}r\omega$.

Si maintenant l'on considère les éléments du cercle de la base C, tels que *mnpq* qui sont groupés dans un même secteur C A B dont l'angle au centre est très petit, il est visible que les frottements produits dans ce groupe d'éléments pourront être regardés comme perpendiculaires au rayon CO qui passe par tous leurs milieux, ou comme parallèles entre eux, et en vertu de leur parallélisme leur résultante sera égale à leur somme, parallèle à leur direction commune et appliquée en un point de CO, situé à une distance du centre C égale à $\frac{2}{3}$ de R (ou au centre de gravité du petit triangle A C B).

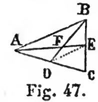


Fig. 47.

En effet, joignant B (fig. 47) au milieu de AC et tirant DE (E étant le milieu de BC) on a :

DE : AB :: CE : BC, ou $DE = \frac{1}{2}AB$, d'ou FE : AF :: DE : AB, car les deux triangles AFB, DFE sont semblables.

Donc $EF = \frac{1}{2}AF$.

On trouverait la même position pour le point F, obtenu en joignant le point C au milieu de AB; or, les deux lignes BD, CF divisant la surface du triangle en deux parties égales doivent être rencontrées par la résultante du frottement de la somme de tous les éléments superficiels du triangle, donc elle est au point F, et $AF = \frac{2}{3}R$.

Le travail du frottement dans le petit secteur ABC sera donc

$$f\frac{N}{A} \times \frac{2}{3}R \times ABC \times \omega.$$

Si l'on raisonne de même pour tous les petits secteurs dont se compose la surface du cercle, on aura une somme de produits semblables, et la somme de tous les secteurs ABC sera précisément la surface A du cercle. Donc, pour un angle de rotation ω, le travail total du frottement du cercle sera $fN\frac{2}{3}R\omega$, et pour un tour entier $fN\frac{2}{3}R \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R f N$.

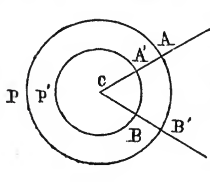


Fig. 48.

52. *Couronne circulaire* (fig. 48). Si l'extrémité d'un axe, au lieu de frotter sur tout un cercle, ne frottait que sur un anneau ou surface comprise entre deux cercles concentriques, comme il arrive dans le cas des

tourillons, lorsque l'axe est pressé sur les coussinets suivant sa longueur, on déduira facilement la valeur du frottement de ce qui précède. En effet, la surface totale de frottement est $\pi R^2 - \pi R'^2$, R R' étant les rayons des deux cercles; le frottement se calculera comme précédemment pour les deux cercles, en remarquant que la pression s'exerce sur la différence de leurs surfaces, ce qui conduira, pour la valeur du travail du frottement, à l'expression $\frac{fN\omega}{\pi(R^2-R'^2)}\left(\frac{2}{3}R\pi R^2 - \frac{2}{3}R'\pi R'^2\right)$, et, après toutes réductions, $fN\omega\left(\frac{\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R'^3}{R^2 - R'^2}\right)$.

Enfin, si on nomme l la largeur de l'anneau égale à $R' - R$, r le rayon moyen de cet anneau, ou la distance de son milieu au centre, on trouve en effectuant le calcul que l'expression ci-dessus revient à $fN\omega\left(r + \frac{12l^2}{r}\right)$ et pour un tour à : $2\pi\left(r + \frac{12l^2}{r}\right) fN$.

Pour terminer ce qui concerne les pivots, nous remarquerons que le travail du frottement croissant comme le rayon du cercle entier du pivot, il y a de l'avantage à diminuer autant que possible ce rayon, jusqu'à la limite déterminée par la dureté et la résistance de la substance dont est formé le pivot. C'est par ce motif que l'on donne aux pivots une forme conique (fig. 49). Souvent encore on leur donne une forme convexe, forme qu'a aussi, dans ce cas, la crapaudine (fig. 50). Le frottement n'a toujours lieu que par un petit cercle de contact qui prend bientôt, le plus souvent, une étendue sensible par suite de la pression et de l'usure.



Fig. 49.

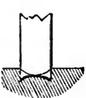


Fig. 50.

53. *Tourillons.* Nous avons dit que les tourillons étaient les parties des arbres de rotation, d'un diamètre moindre que ces arbres, qui tournaient dans des guides de forme cylindrique dits *coussinets.* On donne à ces coussinets un diamètre un peu plus grand que celui des tourillons, afin de ne pas faire naître de pression et, par suite, de frottement par l'ajustement.

Cherchons à évaluer le frottement du tourillon s'appuyant sur le coussinet. La figure représente la section par un plan perpendiculaire au tourillon.

En considérant le mouvement, à partir du repos, quand le contact a lieu sur l'arête inférieure m', la résultante des forces qui font tourner le corps tendra à faire rouler le tourillon sur le cercle Am'B. Son point de contact avec le coussinet s'élèvera ; mais, comme nous supposons le mouvement uniforme, il demeurera en un point m. Il est clair qu'il ne peut y demeurer qu'autant que la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps passe par m et est normale à la tangente en ce point ; ce qui revient à dire : qu'en décomposant la résultante de toutes les forces actives qui agissent sur le tourillon suivant la normale et la tangente, cette dernière composante doit être égale au frottement qui est dirigé suivant cette ligne et de sens contraire. — En un mot, les choses se passeront comme si le tourillon était placé sur le plan incliné déterminé par cette tangente et la génératrice de contact.

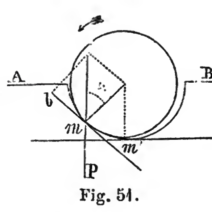


Fig. 51.

Soit P la résultante (fig. 51), menons la tangente commune aux deux cercles au point de contact, soit γ l'angle de la résultante avec la normale en m, la pression étant P cos. γ, le frottement sera fP cos. γ, et l'on aura P sin. $\gamma = f$ P cos. γ, d'où tang. $\gamma =$ tang. α, comme nous l'avons vu sur le plan incliné pour le cas du mouvement uniforme. Ainsi donc pour les tourillons dont le point de contact peut varier, le point m est déterminé par la relation ci-dessus et la tangente en ce point fera avec la résultante des forces un angle complémentaire de l'angle du frottement α. Si la force P est la pesanteur, est verticale, le point m s'obtiendra géométriquement en menant la tangente faisant l'angle $100° - \alpha$ avec la verticale.

La valeur du frottement pour un tourillon, est donc :

$$f\text{P}\cos.\alpha = \text{P}\,\frac{f}{\sqrt{1+f^2}},\ \text{puisque}\ f = \text{tang.}\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$$
$$\text{et}\ \cos.^2\alpha + \sin.^2\alpha = 1.$$

Le chemin parcouru par le frottement est facile à obtenir, pour une longueur l parcourue par un point situé à la circonférence. Soit R le rayon et ω l'angle décrit; soit r le diamètre du tourillon, le travail du frottement sera $r\omega P \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, et comme

$\omega = \frac{l}{R}$, $P \frac{rl}{R} \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$.

La quantité $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ est très voisine de f, f étant très petit en général. On doit la remplacer par f lorsque l'axe ne peut nullement se déplacer. Quand le mouvement au contraire n'a lieu que de m en m' (des deux côtés de m), le frottement n'étant que le roulement est négligeable. C'est ce qui arrive dans quelques systèmes composés d'articulations.

Le chemin parcouru sur un plan, mis sous la même forme, pour le cas du mouvement uniforme est, pour une longueur l, $f\,l$ P cos. α $= Pl \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, c'est-à-dire qu'il est réduit, à l'aide des coussinets, dans le rapport de r à R, rapport toujours très petit, les tourillons étant construits en substances très dures et très résistantes.

54. Dans quelques machines délicates, on peut faire reposer un tourillon sur la circonférence de deux roues (fig. 52), et réduire encore ainsi le frottement des tourillons du premier système dans le rapport du chemin parcouru par un point des circonférences des roues du second système à celui d'un point de leurs tourillons. Mais une semblable disposition ne peut être employée que pour de très faibles forces, autrement les tourillons creusent bientôt un logement dans les circonférences qui cessent alors de tourner.

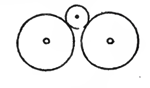


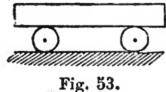
Fig. 52.

55. Dans les pivots, le rayon moyen r devient encore bien moindre que dans les coussinets, et le travail du frottement est encore moindre que pour ceux-ci. Nous avons vu qu'il est, pour un tour, $fP \frac{4}{3} \pi R$, R étant le rayon de la face horizontale du pivot;

il est à celui du coussinet, qui pour un tour est $f P 2\pi R$, dans le rapport de $\frac{4}{3}$ à 2 ou 4 à 6 ou 2 à 3. Résultat qui se comprend facilement, puisque le chemin parcouru par le frottement est bien moindre dans le premier système. La différence est même en réalité plus grande que nous ne le supposons ici, la valeur de R dans un pivot pouvant devenir très faible dans beaucoup de cas, bien moindre que ne peut être celle du rayon d'un coussinet.

On doit conclure de ce qui précède, que toutes les fois qu'il ne s'agit que de transmettre le mouvement, que le problème n'est pas compliqué de conditions spéciales, ce sera à l'état de mouvement circulaire qu'il devra être transmis, afin de profiter de l'avantage du système tour, de faire naître peu de résistances nuisibles.

56. *Frottement sur les galets.* La petite quantité de travail qu'absorbe le frottement des guides du mouvement circulaire, comparés aux guides plans du mouvement rectiligne, fait facilement comprendre l'avantage pour la production de celui-ci de la substitution des galets ou petits rouleaux supportés par des tourillons (fig. 53) qui reposent dans des coussinets (fixés soit à la pièce mobile soit au plan fixe), aux *guides* plans ou *prisons*, entourant la pièce à conduire. En négligeant le frottement de roulement à la surface du galet, dont la valeur n'est pas comparable à celle du frottement de glissement, pour une longueur l parcourue par la barre, la surface du galet décrira une longueur $l = R\omega$ et le tourillon $r\omega$, r étant son rayon. Le travail du frottement sur le tourillon sera


Fig. 53.

$\frac{Prlf}{R\sqrt{1+f^2}}$, au lieu de fPl, c'est-à-dire diminué dans le rapport de r à R, $\sqrt{1+f^2}$ étant très voisin de 1.

Lorsque l'effort est considérable, r ne pouvant plus être très petit, l'avantage des galets diminue, surtout s'ils doivent servir entre surfaces dures, car l'usure altère bientôt la surface du galet; et, comme nous l'avons déjà dit, il se forme des parties plates sur lesquelles se produit un frottement de glissement, car alors le galet ne tourne plus.

Frottement dans le système levier.

57. Le levier, que l'on considère, en mécanique analytique, comme une simple ligne mathématique, doit être considéré, dans la pratique, comme une barre inflexible et pesante qui s'appuie sur un autre corps. Cet autre corps peut être un couteau tranchant, un cylindre extérieur ou intérieur au levier, etc.

Dans le levier oscillant sur l'arête d'un couteau tranchant, comme dans les balances, le travail du frottement est presque nul, puisque le chemin parcouru par le point d'application de cette résistance est sensiblement nul.

Quand les efforts sont considérables, une arête tranchante serait bientôt écrasée. Si le levier se meut sur un cylindre sans glissement, le point d'appui se déplace, et il n'existe qu'un frottement de roulement tout à fait négligeable (fig. 54 et 55). Mais il n'en est plus ainsi, si un glissement a lieu au point de contact, il naît alors un frottement qui est le même que celui qui se produirait sur le plan incliné formé par le plan tangent mené à la surface par le point de contact. Ainsi que nous l'avons vu, le glissement a lieu lorsque la résultante des forces au point de contact, c'est-à-dire la résultante des forces agissant sur le système transportées en ce point (fig. 56), fait, avec la normale du plan tangent mené par ce point, un angle plus grand que l'angle du frottement.

Fig. 54.

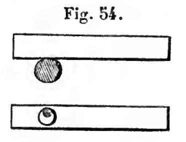


Fig. 55.

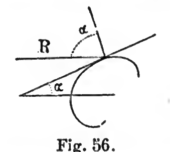


Fig. 56.

Dans les machines où, en général, on ne peut laisser le point de contact se déplacer, et dans lesquelles souvent des impulsions obliques ne permettent pas de se servir d'un couteau reposant par son arête sur un plan très dur, on emploie pour guides du levier, les guides du mouvement circulaire, les coussinets; le frottement se calculera donc comme pour le tour. ω étant l'angle décrit, P la résultante, égale à la différence des forces motrices et résistantes quand celles-ci sont parallèles, le travail du frottement par chaque oscillation

sera $fPr\omega$. Dans le cas d'un couteau ou d'un tourillon oscillant librement dans un coussinet et ne dépassant pas le point m', après lequel le roulement cesse (voir fig. 51), le frottement n'étant que de roulement est négligeable.

ROIDEUR DES CORDES.

58. Les cordes et courroies employées dans beaucoup de machines donnent lieu à une résistance particulière causée par leur flexibilité imparfaite, qui se fait sentir lors de leur enroulement (fig. 57). Il importe de se faire une idée exacte de cette résistance pour pouvoir comparer les systèmes dans lesquels on emploie les cordes ou courroies. Nous ne pouvons que renvoyer, à cet égard, aux cours de mécanique appliquée. Nous indiquerons seulement quelques résultats d'expérience que nous aurons à appliquer plus loin, et qui feront apprécier combien est défectueux un système dans lequel les changements de direction des cordes sont multipliés.

59. *Corde qui glisse sur un rouleau fixe.* Considérons une corde qui roule sur un rouleau fixe et qui supportant un poids P (fig. 58), est tirée par ce poids à une de ses extrémités, tan-

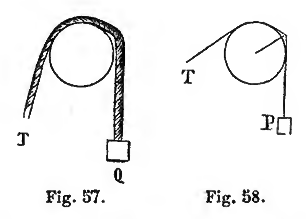


Fig. 57. Fig. 58.

dis que l'autre est tirée par une force T qui l'entraîne. Cette dernière doit non seulement vaincre le poids P, mais encore le frottement que produit la corde en glissant sur tout l'arc du rouleau enveloppé par elle, frottement dû à la pression qui est en chaque point la résultante des tensions de deux tangentes consécutives. Nous empruntons à l'*Aide-Mémoire* de M. Morin le tableau suivant, donnant les valeurs du rapport K entre les deux tensions T et t ($T = K\,t$) des deux brins de la corde.

RAPPORT DE L'ARC embrassé à la circonférence entière.	VALEUR DU RAPPORT K.					
	Courroies neuves sur tambours en bois.	Courroies à l'état ordinaire.		Courroies humides sur poulies en fonte.	Cordes sur tamb. ou treuils en bois.	
		sur tamb. en bois.	sur poul. en fonte.		Bruts.	Polis.
0,20	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,30	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,40	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,50	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,60	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,70	9 »	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,80	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,90	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1 »	23,14	19,16	5,81	10,89	23,90	7,95
1,50	»	»	»	»	111,31	22,42
2 »	»	»	»	»	535,47	63,23
2,50	»	»	»	»	2575,80	178,52

Cette table rend bien compte de l'emploi fréquent, surtout dans la navigation, du frottement des cordes pour s'opposer à de grandes résistances et anéantir d'importantes quantités de travail. Elle montre en même temps combien sont défectueuses les machines dans lesquelles se produisent des enroulements de cordes suivant des arcs notables (l'arc étant le seul élément à considérer et non la longueur absolue de l'enroulement).

Des parties des Machines.

60. Ayant étudié les éléments simples qui se rencontrent dans toutes les machines, il faut en appliquer le résultat à leurs combinaisons, qui constituent les machines qu'emploie l'industrie, et qui, considérées au point de vue de leur usage, ont pour objet *d'exécuter certains travaux des arts, à l'aide des moteurs que présente la nature*, tels que les animaux, le vent, le calorique, etc.

Les pièces formant les machines se communiquent le mouvement

de proche en proche, depuis le moteur jusqu'à la matière à travailler. Elles transforment donc les facteurs du travail, de telle sorte que si $P \times H$ est le travail du moteur, $p \times h$ le travail de l'opérateur, p et h seront différents de P et de H; les deux produits seraient égaux pour un mouvement uniforme si les résistances nuisibles de la machine ne faisaient consommer une partie du travail moteur par des résistances nuisibles.

Ceci bien entendu, on voit comment les machines, en donnant le moyen de faire agir des forces convenables suivant des chemins déterminés, fournissent le moyen de convertir le travail produit par une chute d'eau, par un combustible, en un travail utile consommé à moudre du blé, filer de la laine, scier du bois, etc.

Le produit ph, égal à PH diminué du travail des résistances nuisibles, qui représente le travail de l'opérateur, le travail utile, se compose de deux termes dont la valeur peut varier, le produit restant constant. Cette variation n'est arbitraire ni pour le moteur, ni pour l'opérateur; car il y a évidemment pour tout outil une vitesse plus convenable que toute autre pour l'opération à effectuer. Il en est de même du moteur pour que tout le travail produit par la force naturelle passe dans le premier organe de la machine.

On voit donc qu'une machine étant à établir, sans parler des considérations économiques qui peuvent avoir rapport aux avantages que peut offrir cette machine, pour nous limiter aux considérations mécaniques, le problème exigera, en laissant encore de côté *la science des constructions*, basée sur la théorie de la résistance des matériaux, autre branche de la science, la connaissance de quatre sciences, de quatre divisions de la science mécanique appliquée aux machines qui correspondent aux quatre genres d'organes qui se rencontrent dans les machines.

Les *récepteurs*, ainsi nommés, parce qu'ils reçoivent l'action du moteur naturel. Ils doivent être déterminés par la science des moteurs, être disposés, se mouvoir avec une vitesse telle que le maximum du travail de ce moteur leur soit transmis.

Les *opérateurs*, organes servant à opérer le travail industriel auquel la machine est destinée, et au mouvement desquels s'oppose

le travail résistant utile ; ils relèvent de la science des opérateurs.

Ces opérateurs devant posséder un mouvement déterminé, c'est à l'aide d'organes de *transformation* et de *communication* de mouvement qu'on leur transmet le travail du récepteur.

Enfin l'étude de certains organes qui servent à *modifier* le mouvement de diverses manières, autrement que relativement à la direction et au rapport des vitesses, viendra compléter celle des organes dont se composent les machines.

Nous diviserons donc notre travail en quatre livres, dans l'ordre suivant :

I. *Travail moteur. Récepteurs. Nature et vitesse du mouvement produit d'après le mode d'action de la force motrice.*

II. *Organes de transformation, de communication du mouvement d'une partie d'une machine à une autre partie.*

III. *Organes modificateurs du mouvement.*

IV. *Travail résistant. Opérateurs. Nature et vitesse des mouvements, d'après la nature des résistances et celle du produit à obtenir.*

Les sections II et III sont du ressort exclusif de la Cinématique, tandis que les sections I et IV forment l'objet de la mécanique appliquée aux machines. Nous nous bornerons dans ces sections à rapporter la partie géométrique de cette science, les résultats qu'elle fournit quant aux chemins parcourus et aux vitesses qu'elle détermine, résultats qu'il est nécessaire de connaître pour pouvoir établir les rapports des vitesses entre toutes les parties des machines, et pour que ce traité fournisse les éléments nécessaires à la combinaison complète, au point de vue géométrique, d'une machine quelconque.

LIVRE PREMIER.

RÉCEPTEURS.

61. L'étude des récepteurs, de la vitesse de leur mouvement forme l'application la plus intéressante de la mécanique dynamique, qui se propose surtout, guidée par l'étude des lois physiques qui président à l'action des forces naturelles, d'utiliser celles-ci le mieux possible. Nous n'avons ici qu'à passer en revue les divers récepteurs pour indiquer la forme de leurs organes et établir la nature de leur mouvement. La relation des deux termes du produit $P \times H$ représentant le travail maximum des récepteurs, la partie la plus grande du travail des forces naturelles qui peut leur être transmis forme le point de départ de toute combinaison mécanique pour opérer un travail à l'aide de machines. Ce qui importe surtout au point de vue de la Cinématique, c'est la nature du mouvement et la vitesse déterminée par la science mécanique et dont on ne saurait s'écarter. Passons donc en revue les résultats fournis par la science des moteurs, afin de pouvoir, dans toute combinaison géométrique des machines, partir des vitesses convenables pour le maximum d'effet utile des récepteurs, seule condition qui doit présider à l'établissement de ceux-ci.

On peut diviser en quatre classes les moteurs qu'emploie l'industrie :

1° *Moteurs animés. Force de l'homme, des animaux ;*

2° *Pesanteur ;*

3° *Vitesse acquise ; inertie des corps en mouvement ;*

4° *Chaleur et actions chimiques.*

PREMIÈRE DIVISION.

MOTEURS ANIMÉS.

62. Bien que le but des machines soit principalement de remplacer le travail de l'homme par celui des moteurs naturels, il est grand nombre de cas, tels que celui des transports, où le lieu du travail change sans cesse, et d'autres où l'on n'a besoin que d'une quantité minime de travail, etc., où l'on trouve avantage à avoir recours aux moteurs animés.

Les moteurs animés se distinguent des moteurs naturels en ce qu'ils ne peuvent travailler d'une manière continue et sont forcés de se reposer après un certain temps de travail.

La fatigue extrême qui résulte d'un violent effort, l'impossibilité de le produire avec vitesse; et si l'effort est faible, le peu de travail qui en résulte même si la vitesse du point d'application est grande; la fatigue que cause un travail prolongé, et qui croît avec l'effort et avec la vitesse; tout ceci fait comprendre que la quantité de travail fournie par les moteurs animés est susceptible d'un *maximum* à égalité de *fatigue journalière*, en un mot qu'il existe une vitesse du point d'application, un effort et une durée de travail qui sont les plus convenables pour l'effet utile. Nommons en général V la vitesse moyenne en mètres du point d'application du moteur, ou mieux le chemin supposé décrit uniformément en chaque seconde, P l'effort moyen en kilogrammes qu'il exerce, estimé dans la direction de ce chemin, enfin T la durée totale en secondes de l'action journalière, qui peut être ou continue, ou coupée par des repos plus ou moins fréquents dont la durée n'est pas comprise dans T; la quantité de travail mécanique développé par le moteur aura évidemment pour mesure le produit PVT^{km}.

Cela posé, le produit PVT^{km}, qu'on nomme *quantité de travail journalière*, est susceptible d'un *maximum* à égalité de fatigue journalière, en donnant à P, à V et à T des valeurs qu'une longue expérience indique comme convenables. L'effort, et c'est un des avantages qu'offrent les moteurs animés, peut au besoin varier en

général du triple au quintuple de l'effort qui convient au maximum d'effet, la vitesse de quatre à dix fois celle du maximum, et la durée atteindre dix-huit heures, c'est-à-dire le double de celle que l'expérience indique comme la plus avantageuse ; mais dans ces conditions, le produit P V T ne peut jamais atteindre sa valeur maximum sans que la fatigue journalière du moteur animé soit augmentée et sa santé compromise si un semblable travail doit être renouvelé plusieurs jours de suite. On doit conclure de ceci que la vitesse du point d'application du moteur animé, comme l'effort de celui-ci, doivent être ceux correspondant au maximum de travail, pour les machines bien établies. Cette vitesse étant déterminée, les relations géométriques de la machine permettront de déterminer les vitesses de tous les autres points du système. C'est cette vitesse initiale que nous allons indiquer pour chaque cas.

I. Force de l'homme.

63. Le corps humain, dit Coulomb, composé de différentes parties flexibles, de muscles mettant en mouvement des leviers articulés pouvant permettre des mouvements dans tous les sens, mus par un principe intelligent, se plie à une infinité de formes et de positions.

Considéré sous ce point de vue, c'est presque toujours la machine la plus commode que l'on puisse employer pour produire les mouvements composés qui demandent des nuances et des variations continues suivant des lois compliquées, quant aux pressions, aux vitesses et aux directions.

L'étude de l'homme, considéré comme une machine parfaite, en tant qu'il communique directement aux opérateurs le mouvement convenable, ne fait pas partie de la science des machines, considérée comme ayant pour but principal d'utiliser les forces naturelles essentiellement inintelligentes, à la production de produits précédemment obtenus par le travail de la main. Nous ne devons donc consigner ici que les moyens usités pour employer seulement la force musculaire de l'homme à produire un mouvement simple, quel que soit l'emploi qui doive en être fait.

Action produite au moyen de la force des bras.

64. 1° *Système levier* (produisant le mouvement circulaire alternatif). Le levier peut être disposé dans un plan quelconque, mais agit le plus souvent dans un plan vertical, tant parce que la résistance à vaincre est bien souvent l'action de la gravité, que parce que le travail est plus considérable dans une position où le poids du corps vient seconder l'action musculaire.

La force s'applique soit directement à l'extrémité du levier, soit à l'extrémité d'une barre ou d'une corde assemblée au bout du levier. Elle agit dans le premier cas par un mouvement circulaire alternatif (fig. 59), par mouvement rectiligne alternatif dans le second (fig. 60).

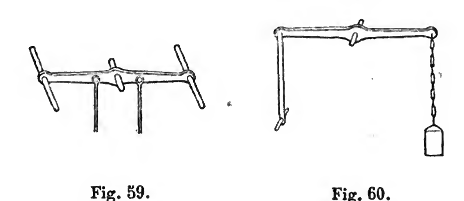


Fig. 59. Fig. 60.

Pour un manœuvre exercé poussant et tirant alternativement dans le sens vertical, avec une barre droite ou à l'extrémité d'un levier, le maximum de travail correspond à un effort ou poids de 5 kil., mu avec une vitesse de $1^m,10$ par seconde.

Donc si le levier, dont le bras est égal à p, fait n oscillations en t secondes en parcourant un angle ω, on doit avoir :

$$\frac{n\omega Pp}{t} = 5^{km}50, \frac{n\omega p}{t} = 1^m10.$$

Le maximum de travail est de 158,400 kil. mét. en huit heures de travail. Si le levier fait une seule oscillation par seconde $n = 1$ $t = 1$ et $\omega Pp = 5,50$ kil. mét. De ces formules l'on déduira pour chaque cas la vitesse que doit posséder le levier à l'extrémité duquel la force est appliquée; la longueur du bras du levier étant en

rapport avec le mouvement possible des bras, c'est-à-dire ne devant guère dépasser un mètre.

65. Les *touches* (fig. 61), système employé dans de nombreuses machines, les *pianos*, les *machines à lire*, etc., sont de véritables leviers. Elles sont employées non pas pour produire un travail moteur considérable, mais pour transmettre avec une grande rapidité, à l'aide des doigts, de petites forces motrices, et multiplier les mouvements qui nécessitent une intervention de l'intelligence en chaque instant. On aura une idée de la rapidité que peut acquérir cette transmission, en disant qu'un joueur de piano peut facilement, avec ses deux mains, toucher 20,000 notes à l'heure.

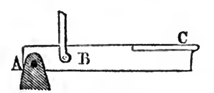
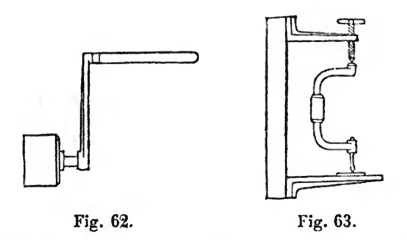


Fig. 61.

66. 2° *Système tour* (produisant le mouvement circulaire continu). L'organe par excellence pour produire le mouvement circulaire à l'aide de la force des bras est la *manivelle* (fig. 62). Lorsqu'elle est appliquée à un axe horizontal, l'ouvrier agit, pour produire le mouvement circulaire, non seulement par son action musculaire, mais encore par le poids de la partie supérieure de son


Fig. 62. Fig. 63.

corps à laquelle il imprime un mouvement de va-et-vient, condition avantageuse comme nous le verrons ci-après. Le mouvement circulaire continu étant le plus usité dans les machines, l'emploi de la manivelle est extrêmement fréquent. La fig. 63 représente la manivelle appliquée à un axe vertical qui est employée dans quelques outils; cétte disposition est moins avantageuse que la première, parce qu'elle ne permet que l'action musculaire.

Un manœuvre agissant à une manivelle adaptée à un axe horizontal, ne doit exercer (pour le maximum de travail) qu'un effort moyen de 8 kil. environ avec une vitesse de $0^m,75$ par seconde; il produit ainsi en une journée de huit heures 172,800 kil. mét. L'effort à la manivelle peut atteindre au besoin 30 kil., mais alors avec une faible vitesse; s'il était prolongé, on obtiendrait, à fatigue égale, une quantité de travail journalière bien moindre que celle indiquée ci-dessus.

Il est avantageux d'employer la manivelle avec une vitesse un peu grande, afin que les points morts, les points du haut et du bas de la course, où la direction du mouvement change, où l'action motrice résultant d'une pression doit être remplacée par une traction ou inversement, soient passés à l'aide du mouvement acquis, de l'inertie des pièces en communication avec la manivelle.

Soit P la force avec laquelle on agit sur la manivelle du rayon p, le travail pour chaque tour sera $P \times 2\pi p$. Si un tour est fait en t secondes, on aura : $\frac{2\pi p}{t} = 0,75$, et pour une force P, $\frac{P\,2\pi p}{t} = 8 \text{ kil.} \times 0,75 = 6$ kil. mét. pour le maximum; 0,75 sera la vitesse que l'on devra toujours supposer à la manivelle, la longueur convenable du rayon étant $0^m,30$ à 0,40, en rapport avec la longueur des bras.

67. Par plusieurs leviers que l'on change successivement de main (figure 64), on produit un mouvement circulaire continu, et cette disposition peut être préférable à la manivelle pour soulever de lourds fardeaux, en allongeant dans ce cas les leviers.

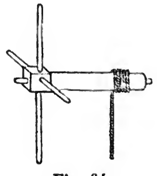


Fig. 64.

L'action devient une action de traction proprement dite, lorsque l'homme, marchant en s'appuyant sur le sol pour développer la force musculaire, produit un mouvement circulaire continu d'un axe vertical par une action exercée à l'extrémité de leviers horizontaux (fig. 65).

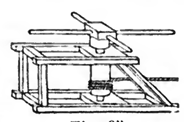


Fig. 65.

68. 3° *Système plan* (produisant le mouvement rectiligne continu). C'est en général à l'aide de cordes que se produit le mouvement rectiligne. Leur flexibilité fait que la direction constante de la résistance dispense de toute espèce de guide. La traction étant produite sur une corde, est détournée vers un point quelconque à l'aide d'une poulie (fig. 66), et l'on obtiendra sensiblement un mouvement rectiligne continu en alternant l'action de chacune des deux mains.



Fig. 66.

Pour un manœuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, la corde redescendant sans charge, le maximum correspond à un poids de 18 kil., mu avec une vitesse de 0,20 par seconde. $Pp = 18 \times 0{,}20 = 3{,}6$ kil. mét. par seconde.

Traction. Si le moteur se déplace et produit le mouvement en se transportant et en s'aidant du poids de son corps qu'il penche contre l'obstacle, le travail devient plus considérable.

Un manœuvre marchant et poussant horizontalement parcourt, pour le maximum de travail, un espace de $0^{m},60$ par seconde avec un effort de 12 kil., et produit en huit heures de travail 207,360 kil. mét.

Travail produit au moyen de la force musculaire des jambes.

69. M. Coriolis, dans son ouvrage sur le *Calcul de l'effet des machines*, résume ainsi les données de l'expérience sur la meilleure manière d'employer la force musculaire de l'homme.

« Lorsqu'on emploie les hommes comme moteurs, on remarque que, suivant qu'ils agissent à l'aide de tels ou tels muscles, ils produisent plus ou moins de travail en se fatiguant également, et qu'en agissant avec les mêmes membres, le travail produit pour une même fatigue, varie avec la rapidité du mouvement de ces membres et avec l'effort qu'ils ont à développer. Ainsi, à fatigue égale au bout de la journée, l'homme avec les muscles des jambes produit plus de travail qu'avec ceux des bras, et en agissant avec les

jambes, il produit le plus de travail possible, lorsque les mouvements n'ont pas plus de rapidité que dans la marche ordinaire, et que l'effort à exercer approche le plus possible de celui que ses muscles exercent habituellement dans la marche.

« Le maximum (non utilisable par machines) correspond au travail qu'il produit en élevant son corps sur une pente douce. »

On produit un travail bien moindre dans le système de tour

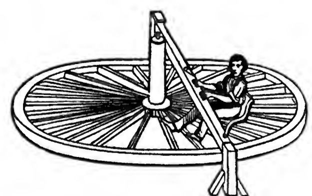


Fig. 67.

représenté fig. 67, dans lequel l'action des jambes s'exerce contre les rais d'une roue horizontale.

La roue du tour à potier, mue de la sorte, laisse à l'ouvrier la disposition de ses bras pour façonner les pièces, qui sont presque toujours de la forme de solides de révolution.

On approche beaucoup de ce maximum dans une roue à chevilles analogue à celle dont nous parlons ci-après, avec cette différence que l'homme reste assis et pousse avec ses jambes les marches disposées sur la circonférence de la roue établie verticalement. Dans ce cas, en exerçant un effort moyen de 12 kil. avec une vitesse de 0,70 par seconde, $Pp = 12 \times 0{,}70 = 8{,}4$ kil. mét., il produit 251,120 kil. mét. en huit heures de travail.

70. La pédale (fig. 68) est un système de levier qui fournit un moyen simple d'application du travail musculaire de la jambe et du pied pour engendrer un mouvement circulaire alternatif. Laissant la liberté des mains à l'ouvrier, ce système est fort employé pour mettre en mouvement les petites machines qu'emploie un ouvrier pour s'aider dans son travail.

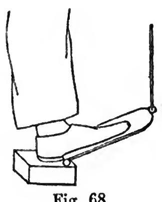


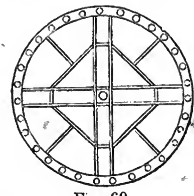
Fig. 68.

Action produite par le poids du corps.

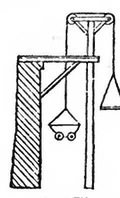
71. Des expériences de Coulomb, résulte ce fait remarquable, que la meilleure manière d'utiliser la force motrice de l'homme est d'employer le poids même de son corps comme force motrice.

Système levier. Est surtout employé pour produire momentanément des efforts considérables pour soulever des fardeaux. Quand il s'agit de produire un travail continu, les conditions pour le maximum sont semblables à celles du système suivant.

Système tour. On agit directement par le poids du corps pour engendrer un mouvement circulaire à l'aide de la roue à chevilles représentée figure 69, à laquelle on donne 3 à 5 mètres de diamètre. L'homme, grimpant sur les échelons, dont la circonférence de la roue est garnie, produit un mouvement circulaire continu de l'axe de la roue. Ce système est barbare par suite des accidents auxquels sont exposés les ouvriers qui le manœuvrent. Le maximum est obtenu par une vitesse de 0,15 par seconde pour un poids de 60 kil. $Pp = 9$ kil. mét.; par journée de huit heures, un homme produit 260,000 kil. mét.


Fig. 69.

72. *Système plan.* Le mouvement rectiligne, produit à l'aide du poids du corps, a été appliqué avec avantage aux terrassements des fortifications. Le système consiste en un montant portant une poulie (fig. 70) sur laquelle passe une corde munie à ses extrémités de deux plateaux, dont l'un porte le poids à monter, et l'autre l'homme. Celui-ci remonte au moyen d'échelles pour donner un mouvement rectiligne d'ascension à un nouveau poids en descendant sur le plateau. On produit ainsi, à bien peu près, le maximum de travail obtenu dans la marche sur une pente douce, qui est l'élévation verticale d'un poids de 65 kil., avec une vitesse de 0,15, ou 280,000 kil. mét. en huit heures.


Fig. 70.

II. Force des animaux.

73. La force motrice des animaux est utilisée au moyen du manége (fig. 71), espèce de tour horizontal, composé d'un arbre vertical reposant sur un pivot. A cet arbre sont fixées, à une certaine distance du sol, une ou plusieurs barres horizontales; l'animal, attelé après une barre, tourne autour de l'axe, développe sa force par traction, et produit ainsi un mouvement circulaire continu.

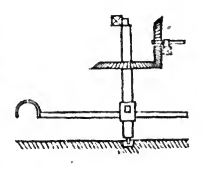


Fig. 71.

Quelques essais faits pour utiliser la force des animaux au moyen de leur poids, ou par l'action de leurs pieds sur des espèces de roues à marcher, par des dispositions analogues à celles employées pour utiliser la force intelligente de l'homme et produire ainsi un mouvement circulaire continu, n'ont jamais été adoptés sérieusement dans la pratique. Le manège est préférable sous tous les rapports.

Pour ne pas être trop lourd, le bras du manége ne doit pas dépasser 3 mètres, et ne peut guère descendre au-dessous de 2 mètres, l'animal ne pouvant, sans fatigue extrême, marcher dans un cercle de petit rayon.

	EFFORT moyen en poids	VITESSE par seconde.	DURÉE de travail journalier.	QUANTITÉ de travail journalier.
	kil.			kil. mét.
Un cheval attelé à un manège et allant au pas. .	45	0,90	8	1,166,400
Un cheval attelé à un manège et allant au trot. .	30	2,00	4,5	972,000
Un bœuf attelé à un manège et allant au pas. .	65	0,60	8	1,123,200
Un mulet attelé de même et allant au pas.	30	0,90	8	777,600
Un âne attelé de même et allant au pas.	14	0,80	8	334,080

Le tableau ci-contre indique les résultats de l'expérience relativement à la vitesse la plus convenable des animaux attelés à un manége, aux efforts qu'il peuvent exercer régulièrement et à la durée de leur action pour le maximum de travail.

DEUXIÈME DIVISION.

PESANTEUR.

Poids des corps solides.

74. Le poids des corps solides ne peut être une source de force motrice que dans des limites fort restreintes, puisqu'il faut nécessairement remonter bientôt le poids descendu, et opérer, par l'action d'une autre force, un travail égal à celui de la pesanteur pour replacer le poids dans sa première position. Aussi, n'emploie-t-on guère le poids des corps solides que pour constituer, le plus souvent à l'aide de leviers, des contre-poids, afin d'assurer le retour d'une pièce dans une première position quand la force qui l'en déplaçait cesse d'agir.

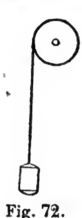


Fig. 72.

La fig. 72 représente le mode employé dans les horloges pour obtenir, au moyen d'un poids, un mouvement circulaire continu.

La corde s'enroule un certain nombre de fois autour du cylindre, et assure ainsi même nombre de tours de celui-ci. Si le poids P peut descendre, d'après la position de l'horloge d'une hauteur H, le travail moteur disponible est P H, et est transmis dans ce cas en totalité au contour du cylindre sur lequel la corde a été préalablement enroulée. On déduira de la valeur possible de H le nombre de tours dont la longueur est $2\pi r$, que l'on pourra faire à la corde autour du cylindre.

Le poids moteur agissant toujours tangentiellement au même cylindre, l'effort qui tend à le faire tourner est parfaitement constant, et par suite très convenable pour les horloges, ainsi qu'on le verra par ce que nous dirons plus loin en traitant des appareils qui servent à la mesure du temps.

Poids des liquides.

75. Le poids des liquides passant d'un certain niveau à un niveau inférieur est une des plus abondantes sources de force qui se rencontrent dans la nature. L'emploi en est d'autant plus facile que l'eau s'écoule naturellement après avoir passé sur le récepteur, pour peu qu'il reste de chute pour déterminer son mouvement sur le sol.

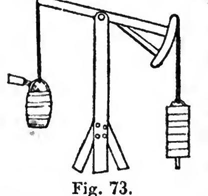
Il faut remarquer que l'abondante source de travail mécanique que fournit la pesanteur des liquides a pour origine première la cause plus générale dont nous parlons ci-après, la chaleur. C'est celle-ci qui, évaporant l'eau, la fait remonter sous forme de nuages dans les parties supérieures de l'atmosphère, d'où elle retombe sous forme de neige ou de pluie sur les parties élevées, pour de là s'écouler vers les parties plus basses du sol.

Passons en revue les principaux organes qui servent à utiliser l'action de la pesanteur de l'eau.

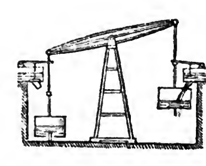
Le travail moteur fourni par la force naturelle en chaque seconde est PH, P étant le poids de l'eau fourni en une seconde par le cours d'eau, H la hauteur de la chute. C'est en vue de faire passer la plus grande partie possible de ce travail dans les récepteurs, que leurs dispositions doivent être combinées. Sans entrer dans des détails qu'il faut chercher dans les traités de mécanique appliquée aux machines, nous pouvons poser en principe général que le mouvement des récepteurs hydrauliques, dans lesquels l'eau agit par son poids, doit être très lent, afin que l'eau qui pendant l'action chemine avec le récepteur ne conserve qu'une faible vitesse en le quittant. Il est facile de comprendre que cette vitesse est produite par une partie du travail moteur non utilisée, et que par suite la perte sera d'autant moindre que cette vitesse sera moindre.

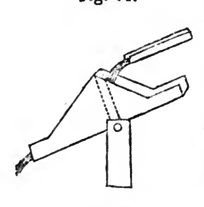
1° SYSTÈME LEVIER.

76. L'eau reçue dans une caisse sert comme contrepoids dans la balance hydraulique pour élever les charges dans les mines, au moyen de tonnes qui reçoivent l'eau (fig. 73) à la surface du sol, et se vident au niveau des galeries d'écoulement.


Fig. 73.

Si l'eau placée à un niveau élevé est reçue dans une caisse suspendue à l'extrémité d'un balancier, celui-ci s'inclinera par la descente de la caisse. Arrivée sur le sol, une soupape placée au fond de la caisse s'ouvrant, et pendant ce temps une caisse placée à l'autre extrémité du balancier recevant l'eau, il résultera de la répétition d'opérations semblables de cet appareil, dit balancier hydraulique (fig. 74), un mouvement circulaire alternatif produit par le poids de l'eau. La figure 75 représente le balancier de Perrault, type primitif de ce genre de machine. L'eau coule le long d'un plan incliné, dont l'inclinaison change alternativement de sens par l'effet d'une cloison placée au-dessus du centre d'oscillation.


Fig. 74.


Fig. 75.

Tous ces appareils satisfont évidemment fort mal à la condition que nous avons posée comme nécessaire pour le maximum, et en outre le mouvement initial qu'ils engendrent, étant intermittent, n'est pas commodément utilisable pour machines sans pertes de travail considérables.

2° SYSTÈME TOUR.

77. *Augets.* Des augets disposés à la circonférence d'une roue produisent un mouvement circulaire continu, dont la vitesse doit être

la moindre possible pour obtenir le maximum d'effet utile (fig. 76). Quelquefois, pour de grandes chutes de 4 à 8 mètres, pour lesquelles

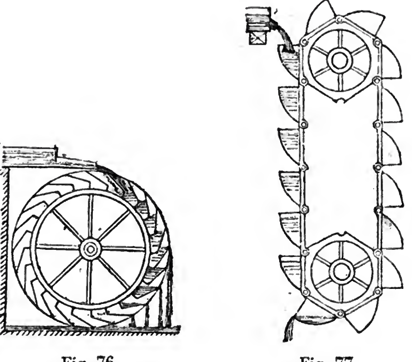
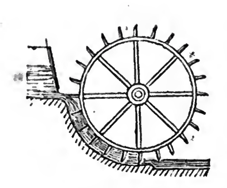


Fig. 76. Fig. 77.

les roues ne pourraient plus être employées, on a employé un système composé de godets (fig. 77) disposés le long d'une chaîne qui transmet le mouvement circulaire continu à l'arbre qui le supporte. Les oscillations de la chaîne qui font verser l'eau des godets, et sa destruction rapide empêchent de se servir de cet organe pour les grandes chutes pour lesquelles, *à priori*, il paraît convenable.

Les roues à augets bien construites ne marchent pas avec une vitesse de plus de 2 mètres par seconde, à leur circonférence, lorsqu'elles ont 2 mètres de diamètre, ou $2^{m},50$, si elles sont plus grandes. On voit que, dans ce cas, le rayon de la roue, égal à bien peu près à la hauteur de la chute d'eau, et sa vitesse angulaire se trouvent complètement déterminés dans chaque cas, et par suite aussi les éléments dont nous cherchons la détermination. Les augets ne doivent pas être remplis au delà de la moitié de leur capacité, autrement le versement commencerait beaucoup au-dessus de la partie inférieure de la roue. Pour les chaînes à godets, la vitesse ne dépasse pas 1 mètre.

78. *Palettes emboitées* (roues de côté ou roues à). Si l'on adapte

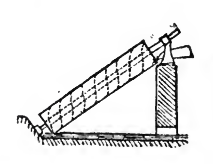

Fig. 78.

à la circonférence d'une roue des palettes droites qui se meuvent dans un coursier les emboîtant dans tous les sens aussi exactement que possible (fig. 78), l'eau ne peut s'écouler qu'en pressant de son poids sur les palettes et produisant un mouvement circulaire continu de l'axe de cette roue, dite roue de côté.

Ces roues doivent prendre l'eau un peu au-dessous du niveau de leur axe. La vitesse la plus avantageuse de ces roues est celle de leur circonférence égale à la vitesse d'écoulement de l'eau, qu'il est avantageux de rendre la moindre possible en la faisant écouler en déversoir, c'est-à-dire par-dessus la vanne et sans charge. La vitesse ne dépasse pas alors $1^{m},50$ à 2 mètres à la circonférence. On ne peut avec avantage rendre la vitesse de la roue inférieure à 1 mètre, à cause des fuites qui existent toujours entre le contour des palettes et le coursier, fuites qui sont une fraction d'autant plus grande du volume de l'eau qui agit sur la roue que la vitesse de celle-ci est moindre.

79. *Plan mobile.* Les dispositions rapportées dans ce paragraphe sont peu employées et défectueuses, en ce que le poids de l'eau est supporté par le récepteur, d'où résulte une usure rapide des pivots et une consommation de travail considérable par le frottement. Ce système a pour base un plan incliné sur lequel glisse l'eau, d'où résulte une pression pouvant faire avancer ce plan, s'il est mobile.

On peut utiliser cette propriété :


Fig. 79.

1° En enroulant le plan incliné autour d'un axe et faisant écouler l'eau de haut en bas sur ce plan (fig. 79), on produira un mouvement circulaire continu par la pression due au poids de l'eau.

2° En disposant des plans inclinés ou des surfaces courbes à une certaine distance d'un axe avec lequel ils sont reliés. Telle est la disposition des anciennes roues à poires (fig. 80)

et celle de la turbine Burdin (fig. 81 et 82), dans laquelle l'eau arrivant dans une couronne placée à la partie supérieure descend le long de plans inclinés, et sort sans vitesse absolue dans une direction opposée à celle du mouvement de la turbine, en produisant un mouvement circulaire continu de l'axe disposé verticalement; condition avantageuse dans certains cas, notamment pour les moulins à blé. La vitesse de la roue doit être 0,70 de celle qu'aurait l'eau tombant de la hauteur de la chute totale.

Fig. 80.

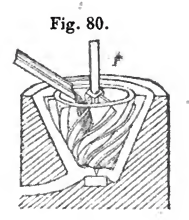
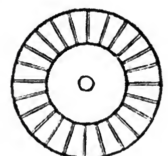


Fig. 81.



Nous donnons plus loin la disposition de la turbine Fourneyron, qui offre les mêmes avantages que la précédente et est exempte du grave inconvénient que nous avons mentionné.

Fig. 82.

80. *Aubes courbes (roues à)*. M. Poncelet, en recourbant les aubes des roues, dites à aubes plates, a donné le moyen de transformer l'action du choc de l'eau sur les aubes plates (dont nous parlerons ci-après) en une action de la pesanteur de l'eau sur des aubes courtes. En effet (fig. 83), l'eau s'élevant sans choc sur la palette courbe en vertu de sa vitesse, tout en conservant la vitesse de la roue, en prendra ensuite une en sens contraire, tout en étant entraînée lorsqu'elle redescendra par l'effet de la pesanteur en pressant sur les aubes et faisant tourner la roue. Les deux vitesses devant être égales pour que l'eau sorte sans vitesse, on conçoit que la vitesse de la roue doit, pour le maximum, approcher de 0,50 de celle de l'eau. C'est en effet le résultat trouvé

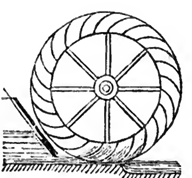


Fig. 83.

pour cette roue qui, aux avantages des roues mues sans choc, réunit celui propre aux roues à aubes droites, de se mouvoir avec une vitesse pour le maximum d'effet utile égale à la moitié de la vitesse de l'eau, ou plus exactement 0,55 de cette vitesse. Ces roues s'emploient avec avantage pour des chutes de 1^m à $1^m,50$, et sont surtout précieuses en ce qu'elles agissent à une assez grande vitesse, tout en donnant de bons résultats quant à l'effet utile.

3° SYSTÈME PLAN.

81. *Machine à colonne d'eau.* Le guide de ce système combiné avec le moyen de recevoir l'eau dans le récepteur, prend la forme d'une surface cylindrique dans laquelle se meut un piston. C'est la disposition qui a trouvé une si admirable application dans la machine à vapeur, et celle que Bélidor a proposée pour utiliser les chutes d'eau très considérables, de 10 à 20 mètres et au-dessus, pour lesquelles les roues hydrauliques sont tout à fait insuffisantes.

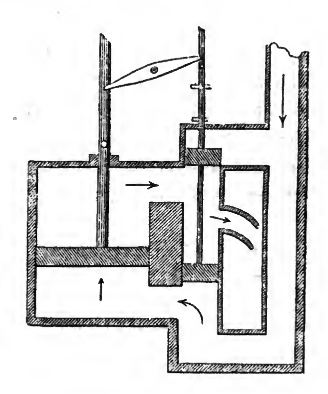


Fig. 84.

Cette machine est dite à colonne d'eau (fig. 84). Disons brièvement en quoi consiste cette machine.

Si l'on amène l'eau dans un corps de pompe dans lequel glisse un piston, celui-ci descendra. Si, quand il est arrivé à la partie

inférieure, par l'effet du jeu de petits pistons auxiliaires mis en mouvement par la machine, on met en communication l'autre face du piston avec le réservoir, et qu'on fasse écouler l'eau de la partie supérieure, le piston remontera ; on donnera ainsi à la tige du piston un mouvement rectiligne alternatif.

La machine est dans ce cas à double effet ; mais le plus souvent elle n'est qu'à simple effet, c'est-à-dire que l'eau n'est introduite que dessous le piston. Les mouvements d'entrée et de sortie de l'eau sont en tous cas commandés par de petits pistons mis en mouvement par la tige du grand piston, lorsque celui-ci arrive à l'extrémité de sa course, de manière à intercepter l'arrivée de l'eau et ouvrir l'orifice de sortie et réciproquement, au moment convenable.

La vitesse du piston doit être peu considérable pour éviter des diminutions de pression à l'entrée de l'eau, et des résistances à la sortie, qui auraient lieu pour de grandes vitesses, par l'effet des résistances produites par les étranglements et les coudes qui existent dans les conduits. A Huelgoat en Bretagne, où M. Juncker a établi une magnifique machine de ce genre, de la force de plus de deux cents chevaux, la vitesse du piston est de $0^{m},30$ par seconde à la montée (pendant laquelle seulement l'eau agit par sa pression), et de $0^{m},70$ à la descente. Cette dernière vitesse est déterminée par l'excès du poids soulevé à la montée sur les résistances qui s'opposent à la descente.

TROISIÈME DIVISION.

VITESSE ACQUISE

OU TRAVAIL PRODUIT PAR L'INERTIE DES CORPS EN MOUVEMENT.

Tout corps en mouvement est une source de travail moteur. Puisque d'après le principe de l'inertie il a fallu l'action d'une force

pour le mettre en mouvement, il faudra l'action d'une autre force pour le remettre en repos. C'est précisément ainsi qu'agissent les résistances des récepteurs, sur lesquels agissent les corps en mouvement.

Solides.

82. Les corps solides ne se rencontrant pas dans la nature à l'état de mouvement, ne pouvant y être amenés que par une dépense de travail, et ne pouvant le communiquer qu'avec une perte considérable par suite des chocs, on n'a jamais employé de véritables récepteurs mis en mouvement par des corps solides animés d'une certaine vitesse.

Liquides.

Les liquides se rencontrent dans la nature animés de diverses vitesses, provenant : de la pente du lit dans les rivières, ou quand ils sortent par la partie inférieure d'un réservoir dans lequel ils se trouvent retenus à la pression due au poids des colonnes supérieures à l'orifice de sortie.

Le maximum ne correspond plus alors au minimum de vitesse; le choc occasionnerait une perte de travail très considérable. C'est du mode d'action de l'eau que résulte la détermination de la vitesse qui correspond au maximum d'effet utile. Dans les exemples que nous allons donner, l'eau agit souvent en même temps et par sa pesanteur et par son choc.

N'ayant ici qu'à déterminer la nature des mouvements des récepteurs et la forme des organes qui permettent d'utiliser l'action du moteur, nous n'avons pas à traiter la solution complète de la question du maximum d'effet utile des divers systèmes de récepteurs hydrauliques. Nous rapporterons seulement les résultats de la science des moteurs. Nous dirons seulement que l'on voit *à priori* que le choc de l'eau contre un récepteur animé d'une très faible vitesse, ferait naître des tourbillonnements, des frottements, des actions moléculaires qui consommeraient inutilement presque tout le travail utile; qu'au contraire si le récepteur avait une vitesse un peu grande, l'eau n'agirait presque plus, la vitesse relative étant

presque nulle. La vitesse du maximum doit donc être une fraction seulement de celle de l'eau peu éloignée de 0,50.

Le système levier et le système plan (qui ne peuvent donner dans un récepteur qu'un mouvement alternatif) ne peuvent être employés avec avantage ; on ne pourrait imaginer leur emploi qu'avec des pertes de travail considérables, puisque la vitesse, devant passer par zéro, il y aurait toujours des chocs lors du changement de sens du mouvement. Le système tour est seul employé.

83. *Palettes plates* (*roues à*). En faisant plonger dans le courant les palettes d'une roue, le choc de l'eau fait tourner celles-ci en produisant un mouvement circulaire continu (fig. 85) dont la vitesse doit être environ moitié de celle de l'eau pour le maximum d'effet utile, plus exactement 0,4 V; le travail varie peu tant qu'elle reste comprise entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$ V. Ces roues prennent le nom de roues pendantes quand elles plongent dans un courant indéfini, telles sont celles qui mettent en mouvement les meules des moulins dits *moulins à nef* construits sur les bateaux placés sur les rivières. Agissant par choc et se répandant autour de la palette, l'eau ne communique à ce récepteur qu'une fraction du travail moteur au plus 0,50 PH.

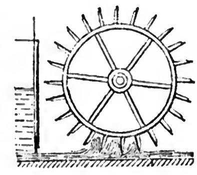


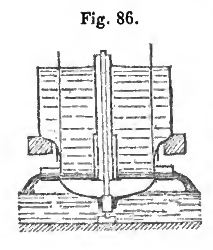
Fig. 85.

84. La roue de côté, représentée fig. 78, reçoit le plus souvent l'eau animée d'une assez grande vitesse, et se trouve mue alors à la fois par choc et par pression de l'eau. Dans cette disposition la vitesse doit être un peu plus grande que celle que nous avons indiquée, dans le cas où l'on agit surtout par son poids.

85. *Palettes courbes verticales.* On emploie dans le Midi le choc de l'eau amenée par une buse sur les aubes creuses de roues horizontales, analogues à celles représentées fig. 80 ; ces roues communiquent immédiatement à la meule supérieure des moulins qu'elles doivent faire mouvoir, un mouvement circulaire continu d'une rapidité suffisante. Leur vitesse doit être 0,55 de celle d'arrivée de l'eau, et le travail utile est seulement 0,35 PH.

Palettes courbes verticales des turbines Fourneyron. Dans

Fig. 86.



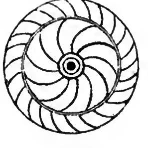


Fig. 87.

ce système (fig. 86 et 87), on évite le choc à l'entrée de l'eau qui a lieu dans le système précédent, en faisant agir celle-ci sur des aubes courbes, renfermées dans une couronne mobile, qui se raccordent à des aubes fixes qui guident la sortie de l'eau. Celle-ci agit sans choc sur la palette, lui communique par la pression qu'elle exerce la vitesse dont elle est animée, pour sortir sans vitesse absolue à la circonférence. Comme dans la roue Poncelet, qui est évidemment le type dont on s'est rapproché dans cette turbine, l'eau entre sans choc sur les palettes courbes, et faisant un instant corps avec le récepteur, possède la même vitesse absolue que lui, tout en conservant une vitesse relative de sens opposé, et par suite peut sortir sans vitesse absolue.

Ce récepteur, qui donne un mouvement circulaire continu à un axe vertical, est très avantageux et fréquemment employé aujourd'hui. Il offre l'avantage, sur la turbine Burdin décrite plus haut, de ne pas charger autant le pivot qui ne supporte pas, comme dans la première, le poids d'une colonne d'eau correspondante à toute la hauteur de la chute. Il jouit de l'importante propriété d'agir convenablement même immergé complétement, pourvu que la prise d'eau soit à un niveau supérieur à celui de l'eau au milieu de laquelle l'écoulement a lieu.

Si l'on appelle V la vitesse de l'eau due à la chute totale, n le nombre de tours en une seconde, R le rayon extérieur de la roue, on obtiendra sensiblement le maximum de travail, tant que le nombre n sera compris entre les limites :

$$n = \frac{3,3V}{R} \text{ et } n = \frac{5,6V}{R}$$

et le travail transmis au récepteur sera égal à 0,75 PH.

Air.

86. *Voiles*. L'air en mouvement peut être utilisé pour mouvoir les organes mobiles qu'il rencontre. Ce sont toujours les voiles qu'on emploie à cet effet, à cause du faible poids de grandes surfaces établies avec elles, et de la facilité avec laquelle on augmente ou on diminue la surface agissante. Les voiles sont le moyen direct d'impulsion des navires pour leur faire surmonter la résistance qu'oppose l'inertie du liquide sur lequel ils flottent.

Moulins à vent. Le vent sert encore de moteur aux moulins. On a quelquefois tenté de disposer horizontalement les voiles destinées à utiliser la force du vent autour d'un axe vertical, en cherchant à éviter l'égalité d'action qui tend à se produire symétriquement des deux côtés de l'axe, soit au moyen de paravents, soit en faisant varier la surface des voiles des deux côtés de l'axe par divers dispositifs. Ces essais n'ont jamais présenté des résultats avantageux dans la pratique, et le seul système employé est toujours celui des voiles placées dans un plan presque vertical (fig. 88), tournant autour d'un axe faisant un petit angle de 8 à 15° avec l'horizon, direction habituelle des vents dans les pays de plaine. Le châssis portant la toile est formé d'une surface gauche dont les éléments s'inclinent les uns sur les autres à partir de l'axe, en restant perpendiculaires à la direction des bras correspondants, et offrent au vent une surface oblique et légèrement concave. Les ailes étant amenées par la rotation de tout le système, produite à l'aide d'un grand levier, dans un plan perpendiculaire à la direction du vent, donnent à l'axe perpendiculaire au plan des quatre ailes un mouvement circulaire continu; car, par suite de l'obliquité de la surface des ailes, l'action du vent fournit évidemment une composante perpendiculaire aux bras.

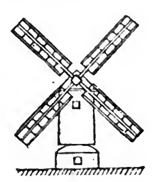


Fig. 88.

D'après Euler, pour le maximum, la vitesse à l'extrémité des ailes doit être de 2,6 à 2,7 de celle du vent.

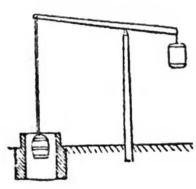
Un semblable moteur, qui produit une vitesse essentiellement variable et n'agit qu'à des intervalles qui ne peuvent être prévus, dont on n'évite les plus grandes irrégularités d'action qu'en faisant varier la surface des voiles, ne peut être évidemment employé que pour quelques opérations très simples, et ne saurait servir pour des fabrications délicates, pour des opérations qui doivent s'effectuer d'une manière continue.

Moteurs secondaires.

87. Nous nous occuperons ici, avant de traiter de la chaleur, de quelques moteurs fréquemment employés dans les machines, et qui sont très distincts des précédents en ce qu'au lieu d'être par eux-mêmes source de travail, comme ceux dont nous venons de parler, il faut qu'un travail antérieur de ces derniers ait été consommé pour faire naître leur action. Comme néanmoins ils sont pour le reste de la machine de véritables moteurs, sans communication avec la force naturelle au moment où ils agissent, il est convenable d'en traiter en parlant des moteurs.

Pesanteur.

Les poids, comme nous l'avons déjà dit, servent fréquemment pour constituer des moteurs secondaires, notamment dans les contre-poids agissant le plus souvent à l'extrémité d'un levier, comme fig. 89. Cette disposition produit le mouvement circulaire alternatif quand la course doit être de peu d'étendue. Nous avons vu la disposition convenable pour produire le mouvement circulaire continu. Dans tous les cas, ces poids restituent le travail dépensé à les élever, et sans les résistances la vitesse de leur chute serait la vitesse de la chute des graves.


Fig. 89.

Pression atmosphérique.

88. La pression atmosphérique, exerçant son action en tous sens agit comme un contre-poids. Elle est ainsi une source de force

motrice secondaire, en restituant le travail dépensé pour faire le vide par les moyens que nous indiquons au livre quatrième de cet ouvrage. Son emploi est donc correspondant aux moyens de faire le vide, opération qui consomme le travail initial, et s'effectue, en général, à l'aide d'un cylindre dans lequel se meut un piston pour enlever l'air. Inversement ce piston pourra être entraîné par la diminution de pression produite en un point éloigné du tube. La compression de l'air, obtenue ou utilisée à l'aide de systèmes en tout semblables aux précédents, sauf qu'ils agissent inversement, produira les mêmes résultats.

Ressorts.

89. L'emploi de l'air raréfié ou comprimé, pour produire le mouvement rectiligne dans des corps de pompe, est fondé évidemment sur la propriété de l'air d'être un ressort parfait, et satisfait ainsi à la condition essentielle que doit remplir un moteur secondaire, de restituer, théoriquement au moins, la totalité de la quantité de travail qu'il a précédemment emmagasinée.

Les ressorts en acier remplissent cette fonction bien plus simplement et sont employés fréquemment dans les machines.

90. *Réaction.* Les ressorts forment la base ordinaire des organes de réaction; c'est leur élasticité qui permet de reproduire en sens inverse les effets produits par un premier mouvement; ils agissent d'une manière analogue aux contre-poids que nous avons vu être utilisés pour atteindre le même but. Les ressorts accumulent de même du travail quand on les tend, et le restituent quand on les laisse se détendre. Les tensions et les chemins parcourus par le ressort en se détendant, sont inverses et identiques des chemins parcourus et des efforts exercés pour le tendre.

Ressort en spirale. Les organes appelés renvideurs, employés dans certains cas de tissage, reposent sur l'emploi d'un ressort en spirale fixé par une extrémité à l'axe, et de l'autre à la bobine sur laquelle s'enroule le fil exerçant une traction parallèle aux circonférence des spires. Le fil déroulé est renvidé par l'action du ressort spiral qui a été tendu par l'action du dévidement.

Cet organe est des plus utiles pour permettre d'imiter les travaux

les plus délicats de l'aiguille par une opération mécanique, en évitant les embarras résultant des fils dévidés dans les divers mouvements nécessaires pour le tissage.

Pour amortir une action dans un sens et la rendre en sens contraire, on se sert, soit de ressorts en spirale dits *boudins* agissant dans le sens de l'axe du cylindre qu'ils forment (fig. 90), soit de ressorts en lames (fig. 91 et 92).

Fig. 90.

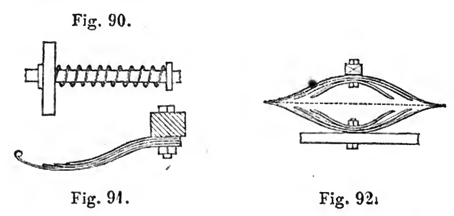


Fig. 91. Fig. 92.

On comprend que de semblables appareils sont fort utiles pour amortir la force d'inertie, la restituer en sens contraire et éviter ainsi une perte de travail importante; aussi les emploie-t-on dans grand nombre de machines dont certaines pièces ayant un mouvement rectiligne alternatif, viennent buter contre les extrémités de ces ressorts à la fin de la course dans un sens, et sont remises en mouvement en sens opposé par l'effet du ressort, au moment même où la force motrice change de sens. Une forte pièce de bois encastrée par son extrémité forme un puissant ressort; on en fait usage dans les marteaux de forges, pour des efforts que des pièces trempées et par suite de résistance assez limitée, car leur volume ne saurait être considérable, ne pourraient supporter.

Impulsion. C'est à l'aide de ressorts qu'on communique en général une impulsion. On bande un ressort par une pièce douée d'un mouvement alternatif qui fait mouvoir l'arrêt qui le maintient dans la position convenable pour que la pièce à lancer vienne se placer devant lui. Le ressort, en se détendant quand on soulève l'arrêt, lance la pièce qui est appuyée sur lui.

Mouvement de quelque durée. Les ressorts métalliques constituent un organe de mouvement secondaire fréquemment employé dans les petites machines, les montres, les horloges, les auto-

mates, etc. On peut se servir d'une lame bandée pour produire un mouvement circulaire suivant un arc, ou d'une hélice enroulée autour d'une tige qui peut se mouvoir d'un mouvement rectiligne; mais, pour que l'action soit d'une certaine durée, pour produire, par exemple, un nombre de tours notable d'un mouvement circulaire, la disposition la plus convenable est celle d'un ressort roulé sur lui-même en spirale (fig. 93), qui se bande au moyen d'une clef à levier entrant dans un carré placé à son centre et qu'un obstacle empêche de se détourner.


Fig. 93.

En se déroulant, le ressort fixé d'une part à l'axe central fait mouvoir d'un mouvement circulaire continu un cylindre, avec lequel il est assemblé par son autre extrémité.

Pour obtenir une régularité d'action très grande, par exemple dans les chronomètres dans lesquels de semblables ressorts servent de moteurs, on emploie des ressorts très longs et très flexibles vers l'extrémité mobile, dont on n'emploie le déroulement que pendant un petit nombre de tours, et par suite entre des positions pour lesquelles la variation de la tension du ressort est peu sensible.

On emploie en général aujourd'hui dans les chronomètres de précision deux ressorts séparés agissant simultanément. Il en résulte une plus grande régularité, puisqu'on peut employer chaque ressort pendant un déroulement moitié moindre, et que c'est surtout vers la fin du déroulement que l'effort s'affaiblit. De plus on trouve cet avantage qu'on peut remonter le chronomètre sans arrêter le mouvement que l'autre ressort fait toujours marcher. Cette dernière condition est si essentielle, que, dans les chronomètres à un seul ressort, il faut y satisfaire à l'aide d'une disposition spéciale que nous aurons occasion de décrire par la suite.

Inertie.

91. De même que lorsqu'une quantité de travail ayant servi à élever un poids, la descente de ce poids restitue ensuite le travail; de même lorsqu'une quantité de travail a produit la vitesse d'un corps, celui-ci ne pourra s'arrêter sans restituer ce travail (en tota-

lité pourvu qu'il n'y ait pas de chocs, d'actions moléculaires). C'est en cela que consiste le principe de l'inertie que nous avons indiqué. Cette série de phénomènes occupe une grande place dans l'étude de la mécanique dynamique; nous ne pouvons nous y arrêter ici, mais devons seulement noter que tout corps en mouvement peut servir de moteur secondaire; c'est ainsi que fonctionnent les organes appelés volants que nous rencontrerons plus loin.

De même le mouvement rapide d'une pièce peut être produit en arrêtant brusquement le mouvement d'un système dont elle fait partie, mais dont elle peut se séparer. Ainsi, dans le métier du tisserand, la navette est mise en mouvement à l'aide d'un tasseau que l'ouvrier meut brusquement à l'aide d'une corde; le tasseau s'arrête après un petit mouvement, et la navette seule est lancée.

Quelquefois on obtient ce résultat par le choc brusque d'une masse en mouvement contre la pièce à mouvoir; mais ces dispositions doivent être rarement adoptées. Il résulte toujours quelque inconvénient de l'action destructive du choc qui a lieu, et par suite il est bien préférable d'employer des pièces élastiques toutes les fois que le choc brusque n'est pas nécessaire.

QUATRIÈME DIVISION.

CHALEUR.

92. La chaleur est la source de force la plus générale et la plus importante; c'est elle qui, par la vaporisation, est la cause des chutes d'eau; c'est elle, si on voulait aller plus loin, qui est la cause du travail de l'homme, dont la respiration est une véritable combustion. Mais, bornons-nous à la chaleur produite par la combustion dans les foyers, en ayant soin de la considérer en elle-même et de ne pas la confondre avec les excipients qui servent à l'utiliser; vapeur d'eau, d'alcool, etc., etc.

Il est important pour cela de poser un principe, trop souvent ou-

blié dans la théorie de la machine à vapeur, ce qui nous engage à y insister ici, bien qu'il paraisse presque évident; c'est que le travail d'une unité de chaleur (capable d'élever d'un degré un kil. d'eau) a un maximum de travail théorique, comme un poids d'eau qui tombe d'une certaine hauteur. On ne saurait admettre, en effet, qu'une quantité limitée de chaleur pût produire un travail infini, ce serait admettre un effet qui ne fût pas en rapport avec la cause qui le produit. C'est ce qui va paraître encore plus clair en étudiant la manière dont la chaleur produit du travail.

M. Poncelet établit le principe fondamental de l'emploi de la chaleur par une induction très satisfaisante.

Il démontre d'abord qu'un gaz comprimé développe un même travail de quelque manière qu'il se détende, qu'il augmente de volume, pourvu que ce soit d'une même fraction de son volume. Ainsi s'il se détend dans deux corps de pompe formés par des pistons différents A, a; e, E, étant les chemins parcourus; le travail sera dans les deux cas pAe, paE; or les quantités Ae, aE représentent le volume dont le gaz s'est détendu, quantités égales par hypothèse, la pression moyenne p, qui ne dépend que de la variation du volume, est également la même : le travail est donc le même.

Ceci admis, le calorique pouvant être considéré comme un fluide sans inertie ni pesanteur, d'une élasticité parfaite, produisant des dilatations quand il s'accumule, des contractions quand il diminue; on doit lui appliquer *à fortiori* le principe posé pour la détente des gaz, ce qui revient à dire :

« Qu'une certaine quantité de chaleur introduite dans un corps ou soustraite de ce corps doit faire naître, contre des résistances directement opposées à son action, des quantités de travail absolues qui sont toujours les mêmes ou indépendantes de la nature des corps, mais dont une certaine partie est, dans les liquides et les solides, employée à contrebalancer la force d'agrégation des molécules. »

Ce principe a été établi pour la première fois, en 1824, au moyen de considérations différentes, dans un opuscule remarquable de M. S. Carnot, ancien élève de l'École polytechnique. Nous allons

essayer, en nous aidant des considérations consignées dans cette brochure (*Sur la puissance motrice du feu*), d'établir les conditions à remplir pour bien utiliser cette source de travail.

1° *Le travail est produit, non par une consommation absolue de calorique, mais par le passage de celui-ci d'un corps chaud à un corps froid.* En considérant la machine à vapeur, il est facile de se rendre compte que c'est ainsi que le travail s'y produit. En effet, le calorique développé dans le foyer par l'effet de la combustion traverse les parois de la chaudière et vient donner naissance à de la vapeur en s'y incorporant en quelque sorte. Celle-ci l'entraînant avec elle la porte dans le cylindre où elle agit, et de là dans le condenseur dont l'eau froide, s'emparant du calorique développé dans la combustion, produit le vide. Il ne suffit donc pas pour produire une puissance motrice d'obtenir de la chaleur, il faut en même temps disposer d'un corps froid. Ainsi la condensation qui est aussi cause de travail, n'a lieu que par la présence de l'eau froide qui sert à condenser la vapeur. On ne peut rejeter celle-ci simplement dans l'atmosphère, comme on le fait dans certaines machines à vapeur à haute pression, qu'autant que la température extérieure est telle que l'eau reste à l'état liquide par l'effet de la pression atmosphérique, température nécessairement moindre que celle de la vapeur, autrement il n'y aurait pas d'eau liquide et par suite pas de machines à vapeur.

2° *Partout où il y a différence de température, il y a production de force motrice.* Tous les corps sont susceptibles de changements de volume, de contractions et de dilatations successives par les alternatives de chaleur et de froid, tous sont capables de vaincre dans leurs changements de volume certaines résistances et de développer ainsi une certaine puissance motrice. Un corps solide, une barre métallique alternativement chauffée et refroidie, augmente ou diminue de longueur et peut mouvoir des corps placés à ses extrémités. Un liquide alternativement chauffé et refroidi peut vaincre les obstacles plus ou moins grands opposés à sa dilatation. Un fluide aériforme produira dans les mêmes conditions des mouvements de grande étendue. Tous ces changements supposent des alternatives de chaleur et de froid, c'est-à-dire la disposi-

tion d'un corps chaud pour transmettre la chaleur à un corps froid.

Puisque le passage de la chaleur d'un corps chaud à un corps froid est une source de force par la dilatation qui en résulte, le bon emploi de la chaleur exige qu'il ne se fasse dans les corps employés à réaliser la puissance motrice de la chaleur aucun changement de température qui ne corresponde à un changement de volume. Cette condition est la condition capitale de la bonne utilisation de la puissance motrice de la chaleur incorporée dans de la vapeur. Si le corps est refroidi par contact avant d'avoir atteint la température du corps froid par l'effet de sa dilatation, il y a évidemment travail perdu comme quand l'eau quitte une roue à augets en conservant une grande vitesse ; il aurait pu se produire un travail qui ne s'est pas produit par l'effet de cette chaleur qui n'a pas causé de dilatation.

L'ensemble des phénomènes physiques et chimiques conduit à considérer les corps comme composés de molécules qui tendent à se réunir sous l'effet des forces d'attraction moléculaire et à s'éloigner par l'effet de la chaleur. Pour chaque température donnée correspondant à un état de dilatation déterminé, il y a équilibre entre les forces moléculaires et le calorique.

La dilatation est le résultat naturel de la chaleur; cette dilatation est directement en raison du calorique dans les gaz permanents pour lesquels les forces d'attraction de molécule à molécule sont nulles; l'effet du calorique sert en partie à équilibrer les forces d'attraction moléculaires dans les solides et les liquides, effet indiqué pour ces divers corps par les variations de chaleur spécifique ; mais il faut remarquer que la perte qui en résulte, quant au travail produit, n'existe pas quand la chaleur sert à faire passer les liquides à l'état de vapeur, car la chaleur latente qui est employée à équilibrer l'attraction moléculaire, se trouve utilisée à produire à pression constante, dans la capacité dans laquelle on a introduit un faible volume de liquide, un volume considérable de gaz, et par suite une quantité de travail correspondante.

Pour les solides, lorsque le corps revient à sa température primitive, en supposant la rotation complète (échauffement et re-

froidissement égaux), les forces de cohésion restituant en sens inverse la force qui leur faisait équilibre en partie, la restriction indiquée par M. Poncelet pour les forces moléculaires, vraie quand on ne considère que partie de cette rotation, paraît théoriquement inutile.

Revenons donc à la question fondamentale dont nous avons déjà fait sentir toute l'importance :

3° *La puissance motrice d'une même quantité de chaleur est-elle constante ou varie-t-elle avec l'excipient employé pour l'utiliser ?* On peut démontrer qu'elle est constante. En effet, la quantité de chaleur qui cause la dilatation d'un corps, produisant une certaine quantité de travail (nous supposons nulle pour cette démonstration l'action moléculaire, nous supposons qu'on agit sur un gaz parfait), cette même quantité de travail exercée en sens inverse pour comprimer le corps, devra à son tour produire le dégagement de la quantité de chaleur qui l'a produite, et qui a fait prendre aux molécules les positions d'écartement que fait cesser une action mécanique.

Si donc, pour une même quantité de chaleur, un corps A donnait un travail mécanique plus grand que tout autre B, l'emploi de ce travail mécanique produit par le corps A, employé à comprimer cet autre corps B, devrait fournir une quantité de chaleur supérieure à celle qui a produit le travail initial, et capable par suite d'engendrer, en se communiquant au corps A, une quantité de travail supérieure à celle qui a produit la compression, c'est-à-dire d'engendrer, en répétant la même opération, une source indéfinie de chaleur et un mouvement perpétuel, ce qui ne saurait être admis. Ce serait admettre la production d'une quantité de travail infiniment grande pour une quantité de chaleur infiniment petite, ce qui serait absurde.

On ne doit donc pas chercher à faire varier l'excipient dans l'espoir d'un bénéfice de travail, mais chercher seulement à utiliser le mieux possible le travail du calorique, qui, comme une chute d'eau, a un maximum théorique (1), dont les machines peu-

(1) Nous avons trouvé que ce maximum était d'environ 110 kil. mét. par calorie, ou pour la quantité de chaleur capable d'élever d'un degré la tempéra

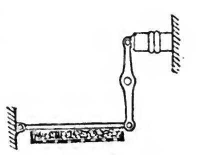
vent utiliser une fraction d'autant plus grande qu'elles sont plus parfaites.

Passons en revue les moyens d'utiliser la force d'expansion du calorique.

Solides.

93. Les solides ayant une force de cohésion que le calorique détruit en partie, avant de produire un effet sensible, il y a d'abord une partie du travail produit annulée par cette cause; mais cette quantité est restituée lorsque, par le refroidissement, le corps revient à son état primitif. La physique ne fournit pas les données suffisantes pour calculer les effets dus à la dilatation des solides. On connaît seulement l'étendue des dilatations, mais non l'effort qu'elles peuvent produire. Chacun connaît l'application faite par Molard pour redresser les murs du Conservatoire, exemple qui, ainsi que nombre de faits, prouve que la force ainsi engendrée est considérable si le chemin parcouru est petit.

Les faibles mouvements produits par la dilatation des corps solides, rendent leur emploi presque impossible pour l'établissement de machines pouvant les utiliser. Il faudrait employer des mécanismes compliqués, des pièces d'une grande force pour transmettre des pressions énormes, etc. Le seul moyen tenté quelquefois, qui n'a guère été employé que dans des appareils régulateurs, disposition qui peut être considérée comme produisant une pression, consiste (fig. 94) à faire dilater et refroidir successivement une barre de fer, dont l'extrémité produit un mouvement rectiligne alternatif.


Fig. 94.

Liquides.

94. Tous les inconvénients que nous venons d'énumérer pour les solides se rencontreraient dans l'emploi des liquides; aussi la

ture d'un kil. d'eau. (Voir *Dictionnaire des Arts et Manufactures*, un premier essai sur ce sujet que nous espérons pouvoir bientôt traiter complétement.)

question n'offre-t-elle que peu d'intérêt au point de vue de l'application. On pourrait théoriquement utiliser la force expansive des liquides, en ajustant, sur la surface de l'enveloppe qui les renferme, des corps de pompe contenant des pistons, dont la tige prendrait par les échauffements et refroidissements successifs du liquide un mouvement rectiligne alternatif.

Vapeur et gaz.

95. Les seuls appareils à noter ici sont ceux qui se rapportent à l'emploi de la vapeur d'eau, la seule réellement employée dans l'industrie. Remarquons toutefois que les gaz permanents, l'air par exemple, offrant l'avantage de pouvoir produire un travail à une température très peu supérieure à la température ordinaire; il en résulte la possibilité d'employer des sources de chaleur donnant une température peu élevée, avantage purement théorique jusqu'à ce jour. Les appareils qui permettraient d'utiliser le travail des gaz échauffés seraient en tous les cas les mêmes que ceux pouvant servir pour la vapeur d'eau. Nous allons les passer en revue, en commençant par quelques-uns de ceux qui sont restés à l'état de projets, et n'ont pu rivaliser jusqu'à ce jour avec la machine à corps de pompe et piston que nous donnerons en dernier.

96. *Elévation d'un liquide.* On a quelquefois proposé de reprendre le premier mode d'emploi de la vapeur (fig. 95), d'élever par la pression de la vapeur de l'eau ou quelque liquide ne produisant pas de condensation, le mercure par exemple, et de recevoir ensuite ce liquide sur une roue hydraulique pour produire un mouvement circulaire continu. De semblables systèmes, qui consistent dans l'emploi de deux récepteurs dont les pertes d'effet utile se multiplient, donneraient des résultats extrêmement désavantageux, quand la perte de chaleur résultant de l'échauffement du liquide à élever ne le rendrait pas complétement défectueux. En effet, soit A le travail théorique, T′ le

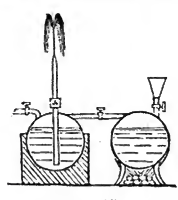


Fig. 95.

travail utile du premier récepteur, T le travail utile du second, on aura :

$$T' = \frac{1}{m} A, \ T = \frac{1}{n} T', \text{ d'où } T' = \frac{1}{m \times n} A;$$

$$\text{ainsi, si } \frac{1}{m} = \frac{2}{3}, \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \ T' = \frac{1}{3} A, \text{ et la perte égale } \frac{2}{3} A.$$

97. 1° Système levier. On peut utiliser la vapeur en construisant un appareil analogue au balancier hydraulique, en se servant de la pression de la vapeur pour faire passer successivement le liquide d'une caisse dans l'autre (fig. 96), et produire ainsi par le poids du liquide un mouvement circulaire alternatif.

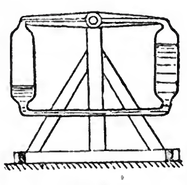


Fig. 96.

Mais tous les appareils de cette nature qui ne sont pas sortis des cabinets de physique ne sauraient, comme la machine à vapeur à piston et corps de pompe, utiliser convenablement la détente de la vapeur, être exempts de beaucoup de résistances accessoires provenant de la présence du liquide, et ne peuvent soutenir, sous aucun rapport, la comparaison avec la machine ordinaire.

98. 2° Système tour. — *Machines rotatives.* On a essayé souvent, et jusqu'ici sans succès, d'obtenir directement le mouvement circulaire continu en disposant le piston dans une couronne cylindrique, et établissant par des pièces permettant le passage du piston la séparation du condenseur à la chaudière. Tel est le système (fig. 97) que la seule inspection de la figure suffit pour faire comprendre. Aucun système de ce genre n'a encore produit de bons résultats. Les frottements, les fuites, etc., ont toujours bien plus que compensé les avantages résultant du mouvement circulaire directement obtenu, et trop d'inventeurs se rui-

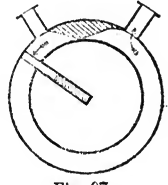


Fig. 97.

nent chaque jour en combinant des machines de ce genre, faute de comprendre comment s'opère la transmission du travail dans la machine ordinaire, et en ne voyant pas qu'il faut avant tout ne pas s'écarter du système qui permet le mieux l'utilisation de la force motrice d'après les conditions précédemment exposées.

Machines à réaction. La plus ancienne machine de ce genre est l'éolypile, dans lequel la vapeur produit le mouvement circulaire continu par la réaction qu'engendre son écoulement sur la

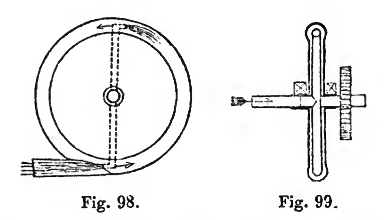


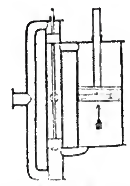
Fig. 98. Fig. 99.

face opposée à l'orifice de la sortie. Les fig. 98 et 99 représentent un système analogue exécuté en Amérique.

Mais pour que de semblables machines travaillassent dans des conditions de maximum, pour ne pas dépenser inutilement leur vapeur, il faudrait que la vitesse à la circonférence fût à peu près égale à celle de la vapeur. Or cette vitesse est tellement considérable que déjà, à des vitesses bien moindres, les matériaux composant l'arbre s'échauffent, grippent et cessent de fonctionner. De plus, si l'orifice de sortie est large comme il faudrait le faire pour des machines de cette nature d'une force quelque peu considérable, l'utilisation de la force expansive de la vapeur est loin d'être assurée. Car cela suppose, ce qui est loin d'être démontré par l'expérience, ou plutôt ce qui est contraire à plusieurs expériences, que le courant de vapeur, doué d'un mouvement extrêmement rapide, exerce toute la contre-pression qui se produit à l'état statique.

99. 3° Système plan. Le guide est ici une surface cylindrique dans laquelle se meut un piston, disposition que nous avons déjà rencontrée en traitant des machines à colonne d'eau.

Corps de pompe et piston (fig. 100). Cet organe constitue le meilleur récepteur de la force expansive de la vapeur. Relativement à l'arrivée de la vapeur sur le piston, on doit distinguer deux cas :


Fig. 100.

1° La vapeur n'est introduite qu'au-dessus du piston, puis condensée quand celui-ci est parvenu à l'extrémité de sa course, c'est-à-dire mise en communication avec une masse d'eau froide qui la liquéfie presque instantanément. Le piston revient à sa première position par l'effet de la pression atmosphérique ou d'un contre-poids, et sa tige prend un mouvement rectiligne alternatif.

2° L'action de la vapeur a lieu successivement sur les deux faces du piston (dont la tige traverse le couvercle du cylindre dans un stuffing-box, espèce de coussinet garni d'étoupes), en produisant le même mouvement que ci-dessus. C'est la machine de Watt à double effet.

La distribution de la vapeur d'un côté ou de l'autre du piston s'obtient à l'aide d'un *tiroir* qui, mu d'un mouvement rectiligne alternatif, recouvre et découvre successivement chacun des deux orifices pratiqués dans la paroi du cylindre, et met ainsi successivement la vapeur qui agit sur chaque face du piston en communication avec la chaudière ou avec le condenseur.

Lorsque la communication entre la chaudière et le corps de pompe se trouve interceptée avant que le piston n'ait accompli sa course, la vapeur travaille en se détendant, et par suite en se refroidissant par l'absorption de la chaleur sensible. Si la résistance que surmonte la tige du piston était décroissante, la détente pourrait théoriquement se prolonger jusqu'à la condensation successive de la vapeur et l'utilisation de toute la chaleur sensible, la vapeur se refroidissant par la détente. De là et de ce que nous avons dit ci-dessus, nous déduirons l'important principe suivant : *La quantité de chaleur qui correspond à l'abaissement de la température de la vapeur lorsqu'elle se dilate est exactement proportionnelle à la quantité de travail qui apparaît alors*. On voit qu'on

pourrait ainsi théoriquement utiliser tout le travail dû au calorique renfermé dans la vapeur. Dans la pratique, il faut rester bien au-dessous de la production des volumes énormes qui seraient nécessaires à cet effet.

Quelquefois on laisse sortir dans l'atmosphère la vapeur qui a agi d'un côté du piston lors du changement de sens du mouvement, mais il est préférable de liquéfier la vapeur à l'aide d'eau froide injectée dans le condenseur, en évitant la perte de travail due à la contre-pression d'une atmosphère qui a lieu quand la vapeur est lancée directement dans l'air.

Les vitesses du mouvement rectiligne alternatif des pistons pour les diverses machines, d'après les résultats les plus avantageux de l'expérience, varient en moyenne, pour les machines fixes, de $0^m,90$ en $1''$ pour les petites machines, à $1^m,30$ pour les fortes machines de 60 chevaux et au-dessus (1).

Pour les locomotives, on sait que cette vitesse est très grande, et que le piston fait une double course par tour de roue motrice dont le diamètre est de 1,80 environ. Il est facile, d'après cela, de calculer les vitesses des pistons pour les diverses vitesses du parcours. Elles deviennent très considérables par suite de la diminution des résistances sur les chemins de fer et de la puissance de vaporisation des chaudières tubulaires employées sur les locomotives, qui permettent de produire abondamment de la vapeur à haute pression.

100. *Actions chimiques*. Les actions chimiques peuvent fournir de la chaleur, comme le fait la combustion du charbon, mais aucune dans des conditions comparables sous le rapport de l'économie.

En est-il de même de celles qui, comme le mélange d'acide sulfurique et de bi-carbonate de soude, peuvent donner lieu à un dégagement de gaz qui se continue même sous des pressions très considérables? (Mais non indéfiniment toutefois, seulement en raison de la valeur mécanique de l'affinité en quelque sorte, car la décomposition n'a plus lieu lorsque la pression augmente suffisamment.) Cela est infiniment probable, comme nous le disons ci-après, mais néanmoins ne veut pas dire qu'il ne puisse y avoir certains cas spéciaux dans lesquels on ne puisse employer quelque jour, quelques réactions, soit connues, soit de celles

(1) Le cheval-vapeur correspond à 75 kil. élevés à 1 mètre en $1''$, c'est une mesure de travail dans laquelle on fait intervenir le temps et dont l'usage est commode dans les applications des machines à la pratique de l'industrie.

que la chimie pourra faire découvrir, sinon avec économie quant aux prix de revient, du moins avec quelques avantages spéciaux.

Les seules actions chimiques utilisées jusqu'à ce jour sont les explosions et surtout celle de la poudre à canon, dont la puissance est due, en grande partie, à la haute température de la vapeur d'eau et des gaz engendrés par la combustion. Le moyen de l'utiliser consiste à faire naître l'explosion dans un cylindre résistant (fig. 101) qui reçoit le boulet de même diamètre que le cylindre. La projection du boulet qui est ici le travail à produire et la grande vitesse nécessaire pour atteindre le but, constituent un problème mécanique d'un ordre particulier. D'après MM. Piobert et Morin la plus grande vitesse obtenue est celle de 745 mètres par seconde, pour un obus de 4 kil. lancé dans un long canon de place par 6 kil. de poudre. Quant à utiliser la poudre à canon pour produire un travail mécanique, il n'y a pas à y songer; M. Poncelet a calculé (Voyez *Introduction à la mécanique*) que le travail fourni par la poudre était quatre-vingt-dix fois plus cher que celui fourni par la houille et la vapeur d'eau.



Fig. 101.

Le mélange des gaz hydrogène ou hydrogène carboné et d'air a été aussi tenté; de semblables systèmes présentent l'inconvénient majeur qui résulte de leur nature même, d'agir par chocs, c'est-à-dire de manière à n'utiliser qu'une faible partie du travail théorique déjà plus coûteux que celui fourni par l'emploi des combustibles pour vaporiser l'eau. Il devient par suite impossible dans la pratique d'employer des appareils réguliers tels que corps de pompe et piston; aussi a-t-on essayé d'élever de l'eau pour la diriger ensuite sur une roue hydraulique, ce qui multiplie les pertes d'effet utile dues à chacun des deux récepteurs.

Nous ne parlerons pas de la condensation du gaz ammoniac dans l'eau (qu'il faudrait, au reste, faire dégager ensuite par la chaleur, et ce qui mènerait, en réalité, à l'utilisation de la chaleur); des machines à gaz acide carbonique condensé et liquéfié par l'échauffement et le refroidissement, de M. Brunel, etc.; machines dont le résultat a bien clairement prouvé qu'avec peu de chaleur on ne pouvait obtenir un grand travail.

Ce que nous rapportons ci-après, d'après M. Liébig, relativement aux actions électro-chimiques, s'applique, au reste, en partie aux actions chimiques et nous paraît limiter parfaitement ce qu'on peut retirer de semblables recherches.

101. *Actions électriques et électro-magnétiques.* Nous ne donnerons pas ici une description détaillée des appareils qui permettent d'utiliser cette source de force, appareils qui ne sont pas sortis jusqu'à ce jour du domaine scientifique. Dans l'application la plus importante, dans le télégraphe électrique, on produit le mouvement de va-et-vient d'un morceau de fer doux par les établissements et les interruptions successives de l'attraction d'un aimant momentané qui soulève un contrepoids. Cette application a prouvé les grands avantages de l'électricité pour transmettre instantanément de petites forces à de très grandes distances;

résultat fort précieux, mais en vue duquel le prix de revient du travail est sans importance.

102. Sans entrer ici dans des détails qui doivent être cherchés dans les traités de physique, nous dirons que ces appareils, dont la fig. 102 représente un cro-

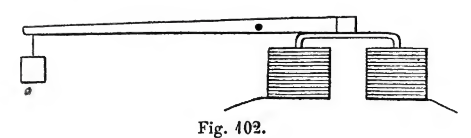


Fig. 102.

quis, reposent sur la belle découverte de M. Arago, de l'électro-magnétisme. Elle consiste essentiellement en ce que, si un courant électrique circule dans un fil métallique entouré de soie et enroulé autour d'un morceau de fer doux, celui-ci devient un véritable aimant, attirant le fer, tant que le courant persiste. On comprend facilement d'après cela comment les interruptions successives d'un courant peuvent produire les pulsations d'un morceau de fer doux, attiré puis ramené successivement à sa place par un contrepoids, et comment ce nombre de pulsations peut indiquer des lettres ou des signes convenus.

103. M. Liébig, dans ses *Lettres sur la Chimie,* se livre à quelques considérations qui fixent très bien les limites des résultats qu'il est possible d'espérer de l'emploi des forces électro-magnétiques, sur lesquelles les belles découvertes faites de nos jours ont attiré l'attention.

Nous citerons ici le curieux passage dans lequel il cherche à résoudre la question suivante : Quel est le plus économique des deux moteurs, l'un étant la houille servant à produire de la vapeur, l'autre du zinc se dissolvant dans l'acide sulfurique et produisant un courant capable d'attirer et de repousser un aimant?

« Pour comprendre cette question et sa signification exacte, il faut d'abord se rappeler ce que les chimistes entendent par équivalents. Ce sont certains rapports invariables d'effets qui sont proportionnés entre eux et qui, par conséquent, peuvent s'exprimer par des nombres. Ainsi, par exemple, si nous avons besoin de 8 kil. d'oxygène pour produire un certain effet, et que nous préférions, au lieu d'oxygène, nous servir de chlore pour obtenir le même effet, nous savons qu'il nous faudra 35 kil. et demi de chlore, ni plus ni moins. De même 6 kil. de carbone sont un équivalent de 32 kil. de zinc. Les nombres qui représentent les équivalents chimiques expriment les rapports généraux d'effets qui comprennent toutes les actions que les corps sont capables de produire.

« Lorsque nous prenons du zinc déjà uni d'une certaine manière à un autre métal, et que nous le mettons en contact avec de l'acide sulfurique étendu, il se dissout sous forme d'oxyde de zinc : il y a combustion du zinc au dépens de l'oxygène que lui cède le liquide. Cette action chimique a pour résultat la formation d'un courant électrique qui, si on le conduit au moyen d'un fil, fait passer ce fil à l'état magnétique. Ainsi donc, en faisant dissoudre 1 kil. de zinc, comme je viens de le dire, nous obtenons une certaine quantité de force capable, par

exemple, de soulever à 1 centimètre de hauteur un poids donné de fer, et de le tenir suspendu. Plus le zinc se dissoudra rapidement, plus le poids qu'il soulèvera et tiendra suspendu pourra être considérable. En interrompant et en rétablissant alternativement le contact du zinc avec le liquide acide, nous avons la faculté d'imprimer à la pièce de fer, sur laquelle agit la force motrice, un mouvement de va-et-vient vertical ou horizontal : par conséquent, nous possédons là un agent capable de faire mouvoir une machine quelconque.

« Jamais une force ne naît de rien. Dans l'exemple que nous venons de citer, nous savons que la puissance motrice est produite par la dissolution (par l'oxydation) du zinc. Mais si nous faisons abstraction du nom que l'on donne à la force motrice qui se développe dans ce cas-ci, nous savons que nous pouvons également la produire au moyen d'un appareil tout différent. Ainsi, lorsque nous faisons brûler du zinc sous la chaudière d'une machine à vapeur, c'est-à-dire dans l'oxygène de l'air au lieu de l'oxygène de la pile galvanique, nous produisons de la vapeur d'eau, et, par le moyen de cette vapeur, une certaine quantité de force motrice. Si maintenant nous admettons (ce qui du reste n'est nullement prouvé) que la quantité de force obtenue soit inégale dans les deux cas de combustion du zinc, c'est-à-dire que nous obtenions deux ou trois fois plus de force, ou bien, si l'on veut, que la déperdition de force soit beaucoup moins considérable quand nous employons la pile galvanique, nous ne devons pas perdre de vue que le zinc peut être représenté par certains équivalents de charbon ; et nous devons les prendre pour éléments de notre calcul. D'après les expériences de Despretz, 6 kil. de zinc, en se combinant avec l'oxygène, ne développent pas plus de chaleur que la combustion d'un seul kil. de charbon : par conséquent, toutes choses étant égales d'ailleurs, 1 kil. de charbon produira six fois plus de force motrice que 1 kil. de zinc. Il est évident qu'en supposant la perte de force égale de chaque côté, il serait beaucoup plus avantageux de se servir de charbon que de zinc, alors même que ce métal brûlé dans la pile galvanique produirait quatre fois autant de chaleur qu'un poids égal de zinc brûlant sous la chaudière d'une machine à vapeur. En un mot, il est extrêmement probable que, si nous brûlions sous la chaudière d'une machine à vapeur la quantité de charbon nécessaire pour traiter une certaine quantité de minerai de zinc, nous obtiendrions une somme de travail de beaucoup supérieure à celle que pourrait produire le zinc obtenu, sous quelque forme et dans quelque appareil que ce métal fût employé.

« Il existe entre la chaleur, l'électricité et le magnétisme un rapport analogue à celui que l'on observe entre les équivalents chimiques du charbon, du zinc et de l'oxygène. Avec une quantité donnée d'électricité, nous produisons une proportion correspondante de chaleur ou de force magnétique : la chaleur et la force obtenues sont réciproquement équivalentes. Nous nous procurons cette quantité déterminée d'électricité au moyen de l'affinité chimique qui, sous une forme, donne de la chaleur, et, sous une autre, de l'électricité ou du magnétisme. Avec une certaine somme d'affinité, nous produisons un équivalent d'électricité ; de même, en sens inverse, avec une somme déterminée d'électricité,

nous décomposons des équivalents de combinaisons chimiques. Ainsi donc la dépense de force magnétique correspond rigoureusement à la dépense d'affinité chimique. Dans la pile, c'est l'affinité chimique du zinc et de l'acide sulfurique qui produit la force motrice ; dans la machine à vapeur, c'est l'affinité du charbon et de l'oxygène du courant d'air. »

Si donc on songe, d'une part, au bas prix auquel on obtient le charbon de terre (le seul corps combustible qui se trouve, dans la nature, en masses considérables), on en conclut qu'aucun corps combustible ne peut lui être comparé, quant à la production du travail, d'autant plus qu'en général ceux-ci n'ont pu être extraits de leurs combinaisons qu'à l'aide d'une quantité de charbon capable de produire une quantité de chaleur au moins égale à celle qui pourrait être produite par leur nouvelle combinaison avec l'oxygène ou par une force électro-magnétique correspondante.

104. En résumé, les principaux récepteurs disposés d'après les prescriptions de la science, pour utiliser le plus complétement possible le travail des forces naturelles, et les appliquer de la manière la plus avantageuse à la production industrielle, donnent :

1° Avec les moteurs animés, tout genre de mouvement en raison du mode d'application de la force, circulaire ou rectiligne, continu ou alternatif, avec une vitesse qui ne peut dépasser 1 mètre par seconde au point d'application de la force.

2° Avec les chutes d'eau, pour tous les cas de chutes qui ne dépassent pas 4 ou 5 mètres, c'est-à-dire pour le cas général, un mouvement circulaire continu de 2 mètres à $2^m,50$ par seconde évalué sur la circonférence d'une roue d'un diamètre à peu près égal à la hauteur de la chute. Les seules roues pouvant prendre une vitesse plus grande sont les roues de côté, les roues Poncelet, et surtout les turbines, qui peuvent utiliser des chutes beaucoup plus grandes et produisent le mouvement rapide de rotation d'un axe vertical. Nous ne parlons pas des machines à colonne d'eau, qui ne sont employées que pour les épuisements des mines.

3° Avec la vapeur, un mouvement rectiligne alternatif de la tige du piston, dont la vitesse ne dépasse pas généralement 1 mètre par seconde.

Tels sont les mouvements, bien limités quant aux directions et aux vitesses, déterminés d'une manière absolue dans chaque cas par la science des moteurs qui nous fournit ces résultats, à l'aide desquels il s'agit d'obtenir, par des transformations et modifica-

tions convenables, tous les mouvements variés qui sont nécessaires à l'exécution par machines des travaux les plus complexes de l'industrie manufacturière. On comprend combien ces mouvements doivent être variés pour répondre à tous les cas possibles de la pratique, et combien le génie des inventeurs de machines a dû engendrer de combinaisons pour parvenir à la solution de tous les problèmes de fabrication mécanique ; il y a donc là une science réelle qui se propose d'obtenir tous les mouvements possibles à l'aide du petit nombre de ceux que fournissent les récepteurs, c'est celle que nous avons appelée science des transformations de mouvement. C'est elle que nous allons maintenant étudier.

LIVRE DEUXIÈME.

ORGANES DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT.

Nous venons de passer en revue la nature et la vitesse des mouvements des récepteurs qui résultent du mode d'action des forces naturelles. C'est ce mouvement qui doit être communiqué aux opérateurs, dont les mouvements sont également assujettis à des conditions déterminées de direction et de vitesse nécessaires à l'exécution du travail industriel. Entre l'opérateur et le récepteur, dont les mouvements propres sont determinés, devront donc être interposés des organes établissant la communication, la transformation du mouvement initial. Ce sont ces organes, dont l'étude forme la partie la plus importante de la Cinématique.

Le problème, considéré dans toute sa généralité, consiste à déterminer les systèmes par l'intermédiaire desquels on peut communiquer le mouvement quelconque d'un corps à un autre corps, quels que soient les positions relatives de ces deux corps, en transformant le premier mouvement en un autre quelconque.

Or, le mouvement de toute partie élémentaire de machine peut être, quant à la forme, quant à la courbe décrite par un point de cette partie, rectiligne, circulaire ou suivant une courbe; quant à sa direction, se continuer toujours dans le même sens ou continu; se produire successivement d'avant en arrière et d'arrière en avant, être alternatif.

Avant d'établir les diverses combinaisons deux à deux de ces mouvements, ce qui constituera autant de problèmes dont la solution fournira celle du problème général de la transformation des

mouvements, nous devons conclure des résultats auxquels nous sommes parvenus dans les préliminaires :

1° Quant à la forme des lignes décrites par un point du corps en mouvement, que le mouvement circulaire se produisant avec le moins de frottement est celui qui doit être préféré quand son emploi est possible, notamment lorsqu'il s'agit seulement de communiquer le mouvement de proche en proche et non de le transformer ;

2° Que les mouvements continus sont au point de vue dynamique préférables aux mouvements alternatifs ; seuls, en effet, ils permettent l'uniformité du mouvement qui assure le travail régulier d'une machine, et sont exempts des destructions de travail qui résultent en général du changement de sens du mouvement des pièces à mouvement alternatif. De plus, la transmission d'une même quantité de travail peut se faire par des pièces ayant le minimum du poids et par suite causant le minimum de frottement, lorsque le mouvement est uniforme ; car, lorsqu'il ne l'est pas, le poids des pièces (et par suite le frottement) doit croître, jusqu'à ce qu'elles puissent résister aux plus grands efforts qui sont transmis, et qui sont nécessairement supérieurs, en certains moments, à ceux du mouvement uniforme pour une même quantité de travail et un même chemin parcouru. Les mouvements continus doivent donc toujours être ceux des pièces fondamentales des machines, par exemple ceux des pièces qui n'ont pour objet que de communiquer le mouvement à distance, et parmi ces mouvements le circulaire continu est le principal ; car l'étendue des machines étant nécessairement limitée, le rectiligne continu ne saurait s'y rencontrer toujours de même sens pendant un long intervalle. En général, des mouvements rectilignes continus en sens opposé se succèdent l'un à l'autre, et ce n'est qu'en considérant le mouvement de la machine pendant un court intervalle, qu'on peut considérer le mouvement rectiligne comme continu.

De ce qui précède se déduit cette importante conséquence, qui ne sera pas contestée par les personnes qui ont étudié les machines, c'est que le problème général de la transformation d'un mouvement quelconque en un autre se réduit presque, dans la pratique, à la transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement

quelconque. Les organes qui constituent les solutions tant directes que réciproques de ce problème, comme il sera facile de le voir par ce qui va suivre, comprennent presque tous ceux employés dans les machines bien construites.

105. Devant étudier ici tous les organes qui se rencontrent et peuvent se rencontrer dans les machines, nous distinguerons :

1° Les transformations de mouvements continus en continus ou alternatifs en alternatifs. Nous trouverons avantage à étudier en même temps les mouvements de même nature, soumis aux mêmes conditions dynamiques ;

2° Les transformations de mouvements continus en mouvements alternatifs, composées de systèmes soumis à des conditions dynamiques différentes dans les deux systèmes mis en rapport, mais les mêmes pour ceux relatifs à cet ordre de transformations.

Nous en arrivons ainsi au tableau suivant, qui indique tous les problèmes particuliers (chaque problème comprenant la solution directe et la solution réciproque) en lesquels se décompose, dans les machines, le problème général que nous nous sommes proposé : *Transformer un mouvement quelconque en un autre mouvement également quelconque.*

MOUVEMENTS CONTINUS EN MOUVEMENTS CONTINUS.

Mouvement circulaire continu en	(1) Circulaire continu. (2) Rectiligne continu.
Mouvement rectiligne continu en	(3) Rectiligne continu.

MOUVEMENTS CONTINUS EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

Mouvement circulaire continu en	(4) Circulaire alternatif. (5) Rectiligne alternatif.
Mouvement rectiligne continu en	(6) Circulaire alternatif. (7) Rectiligne alternatif.

MOUVEMENTS ALTERNATIFS EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

Mouvement circulaire alternatif en	(8) Circulaire alternatif. (9) Rectiligne alternatif.
Mouvement rectiligne alternatif en	(10) Rectiligne alternatif.

(11) Mouvement continu ou alternatif d'après une courbe donnée, en mouvement quelconque et réciproquement.

Si nous devons décrire tous les organes simples qui peuvent permettre toute transformation de mouvement, nous ne devons pas traiter de celles obtenues par une double transformation, en pas-

sant par un mouvement intermédiaire, et ne les indiquerons que dans quelques cas remarquables. C'est que, bien que de semblables systèmes soient fort usités et bien souvent préférables à la solution directe, surtout à cause des avantages qu'offre le mouvement circulaire continu, avantages qui le font souvent employer comme intermédiaire, nous n'avons pas à nous y arrêter; la compréhension de ces systèmes, variés à l'infini, résultera trop simplement de l'étude des organes simples.

106. Avant de passer à l'étude d'aucun organe, rappelons le point de vue qui nous guide dans ce travail, sur lequel nous nous sommes étendu dès le début, et qui sert de base à la classification précédente.

Nous avons vu que tout organe élémentaire d'une machine était essentiellement un corps guidé par des obstacles, et, par suite, nécessairement du genre *levier*, du genre *tour* ou du genre *plan.*

Le levier produit de sa nature le mouvement circulaire alternatif; le tour, le mouvement circulaire continu ; et le plan, le mouvement rectiligne continu ou alternatif. C'est parce que tout organe élémentaire de machine est nécessairement une de ces machines simples, que les mouvements ne peuvent être que circulaires alternatifs, ou circulaires continus, ou rectilignes continus, ou rectilignes alternatifs (en laissant de côté, pour le moment, les mouvements suivant les éléments linéaires qui ne se succèdent pas en ligne droite ou d'après une courbe donnée, qui dépendent du genre plan).

On voit, dès à présent, que les organes de transformation de mouvement ne peuvent consister essentiellement qu'en un moyen d'établir une liaison entre un de ces systèmes et un autre ; ainsi, pour passer du circulaire continu au circulaire alternatif, il faudra faire mouvoir par un système tour un système levier. Tout ce qui va suivre ne peut être que l'application de ces principes.

107. Dans chaque cas des communications de mouvement que nous venons d'énoncer, il faut considérer :

1° *Les positions relatives que peuvent avoir les directions des deux mouvements.* Ainsi, pour la transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu, on devra passer en revue les diverses positions que les deux axes peuvent avoir entre eux, savoir : parallèles, se rencontrant, ne se rencontrant pas sans être parallèles.

2° *Le rapport des vitesses suivant qu'il doit être constant ou variable.* L'uniformité du mouvement étant une condition essentielle de l'économie du travail, le rapport de vitesse des organes intermédiaires entre le récepteur et l'opérateur est presque toujours constant, et l'on doit s'efforcer de satisfaire à cette condition toutes les fois que cela est possible ; ce n'est que rarement que dans la dernière communication ce rapport est variable pour donner à l'opérateur un mouvement spécial dont les conditions sont déterminées par la nature de la fabrication.

Quant aux moyens d'établir une liaison entre un système et un autre, nous distinguerons les systèmes où les deux pièces en mouvement agissent directement l'une sur l'autre par contact direct, et donnent lieu, par suite, à des frottements, soit de roulement seulement, soit de glissement (1), et ceux dont l'action a lieu à l'aide de pièces intermédiaires soit flexibles, telles que les cordes, soit rigides, telles que les pièces à articulations, etc.

Dans chaque cas de transformation de mouvement, il y aura donc lieu de passer en revue tous les systèmes possibles fournissant les solutions des problèmes indiqués dans le tableau suivant :

		L'ACTION A LIEU :	
Pour toute position relative possible dans les directions de mouvements.	1° Rapport de vitesse constant.	1° Par contact immédiat	1° Avec roulement.
	2° Rapport de vitesse variable.		2° Avec glissement.
		2° A l'aide d'intermédiaires	1° Flexibles.
			2° Rigides.

Les organes déterminés géométriquement, surtout d'après leur mode d'opérer, doivent satisfaire encore à certaines conditions dynamiques, auxquelles on doit quelquefois avoir égard dans le tracé, et qui, d'ailleurs, ne sauraient être négligées dans leur étude complète. C'est à quoi l'on parvient par l'évaluation du frottement de glissement, cause principale des résistances, évaluation indispensable pour pouvoir appliquer à la pratique les résultats de la science ; car toutes les solutions possibles ne sont pas également bonnes, et pour choisir entre deux solutions, il faut pouvoir se

(1) Les liaisons qui agissent en engendrant un frottement de glissement consistent le plus souvent en une saillie d'une des pièces entrant dans une cavité de l'autre pièce. C'est ce que l'on va voir par la description des organes que nous allons étudier.

rendre compte de celle qui consomme le moins de travail en résistances passives; c'est ce qui fait que, dans bien des cas, des solutions compliquées sont préférables à des solutions directes.

I.

MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE CONTINU.

108. Le mouvement circulaire continu étant produit par le système tour, par la rotation autour d'un axe, cette transformation consiste à communiquer le mouvement d'un système tour à un autre système de même nature.

Les divers organes que nous allons étudier consistent dans des moyens d'établir cette communication.

1re *Section.* — Rapport de vitesse constant.

Position relative des directions des mouvements. Les axes des deux mouvements circulaires peuvent avoir trois directions relatives : être parallèles, se rencontrer, ne pas se rencontrer sans être parallèles, sans être dans le même plan. Nous passerons successivement en revue ces trois positions.

1° AXES PARALLÈLES.

109. Nous en finirons d'abord avec un cas particulier des axes parallèles, celui où les deux axes sont placés dans le prolongement l'un de l'autre. Il suffit évidemment d'assembler d'une manière fixe les deux axes pour obtenir la communication cherchée, si la vitesse des deux axes doit être la même. Si elle devait être différente, on emploierait un des systèmes que nous allons décrire, d'abord pour transmettre le mouvement de l'axe moteur à un arbre auxiliaire parallèle, et de celui-ci à l'axe qui doit être mis en mouvement.

Organes où l'action a lieu par contact immédiat avec roulement.

110. Soient deux pièces AC, BD (fig. 103), qui se conduisent l'une l'autre par contact immédiat, en tournant autour de leurs

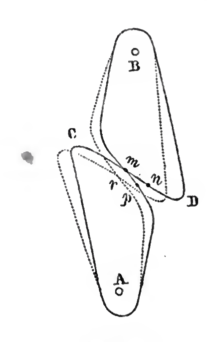


Fig. 103.

centres de rotation A et B, et soit m leur point de contact à l'origine du mouvement. En passant de cette position à une autre quelconque, les points n de B et p de A sont parvenus au contact en r. Ce mouvement n'a pu avoir lieu sans que chacun des points de l'arc mp de l'une des courbes ait été successivement en contact avec l'un des points de l'arc mn de l'autre courbe. Si les arcs mp, mn sont inégaux, il y a nécessairement eu *glissement* le long d'un chemin égal à la différence des arcs ; si au contraire toujours $mp = mn$, aucun glissement n'a eu lieu, et le mouvement s'est transmis seulement par *roulement* des arcs l'un sur l'autre.

Pour qu'un semblable mode de transmission soit possible, il faut donc que les longueurs d'arcs qui ont été successivement en contact soient constamment égales. De plus nous supposons que le rapport des vitesses angulaires est constant. Ces deux conditions seront remplies si les arcs appartiennent aux circonférences de deux cercles dont les rayons sont constants, et nous verrons bientôt qu'elles ne peuvent être satisfaites que dans ce cas.

Nous en arrivons ainsi au système des cylindres ou rouleaux.

111. *Rouleaux.* Si l'on divise la distance qui sépare les deux axes en deux parties, qui soient en raison inverse des vitesses angulaires des deux axes, et, qu'avec ces rayons, on construise deux surfaces cylindriques, dont les génératrices soient parallèles aux axes ; ces deux surfaces étant en contact (en supposant la résistance à surmonter inférieure au frottement de glissement), serviront à mouvoir le second axe à l'aide du premier et avec la vitesse vou-

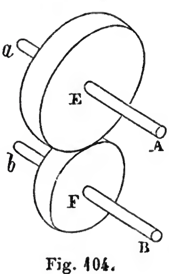


Fig. 104.

lue (fig. 104). En effet, les longueurs des circonférences passant au point de contact, puisque par hypothèse il n'y a pas de glissement, étant égales, si on appelle ω, ω' les vitesses angulaires, R, R' les rayons, on aura $R\omega = R'\omega'$, ou $\omega' : \omega :: R' : R$, c'est-à-dire que les vitesses angulaires des arbres sont en rapport inverse des rayons. Pour éviter le glissement dans la pratique on garnit les circonférences de peau de buffle; toutefois, ce système ne peut servir qu'à transmettre des forces minimes entre des axes rapprochés, pour les autres cas il faut passer aux systèmes suivants.

Organes où l'action se produit à l'aide d'intermédiaires flexibles.

112. *Courroies.* Si l'on fixe sur deux axes parallèles des tambours ou poulies, sur lesquels s'enroule une corde flexible (fig. 105),

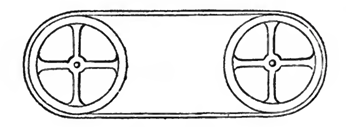


Fig. 105.

ou mieux une courroie de cuir, on aura une solution du problème proposé. Quand on emploie une corde, la gorge de la poulie doit être creuse, mais quand on emploie une courroie plate la circonférence de la poulie doit être bombée, forme qui empêche la courroie d'abandonner la poulie, si la traction est quelque peu oblique; car si la surface était concave, les arêtes saillantes des bords ne manqueraient pas d'attirer la courroie, pour peu que celle-ci les touchât, et de la détacher du tambour.

En donnant à la courroie une tension suffisante pour déterminer un frottement supérieur à la résistance à vaincre, le mouvement d'une des poulies produit le mouvement de l'autre, qui tourne dans le même sens que la première.

Quand le mouvement circulaire continu à obtenir doit être de direction contraire à celle du premier, on croise la courroie entre les deux tambours (fig. 106), l'arc enveloppant étant plus grand, la

courroie peut transmettre de plus grandes forces. Si on ne peut changer la direction du mouvement, cette dernière condition peut encore être remplie en faisant faire un ou plusieurs tours entiers à la courroie autour du tambour.



Fig. 106.

Les courroies sont un précieux organe de transmission, parce qu'elles causent peu de résistances nuisibles, surtout quand on emploie des courroies de cuir ou de caoutchouc, dont la raideur est peu considérable, et qu'il n'y a aucun frottement de glissement de la courroie sur les poulies; que, si elles ne peuvent transmettre des forces très considérables, elles peuvent le faire avec de grandes vitesses, et par suite, opérer un travail utile important ; enfin, que si la résistance croît par accident, la communication s'arrête, la courroie glissant alors sur son tambour, sans qu'il y ait rupture.

Quant aux vitesses, il est clair que la figure restant toujours la même quand le mouvement est devenu uniforme, la même longueur de courroie passe sur les deux poulies; R R′ étant leurs rayons, $\omega\,\omega'$ leurs vitesses angulaires, on aura évidemment pour une même longueur de courroie L passant sur chaque poulie dans l'unité de temps $L = R\omega = R'\omega'$ ou $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}$. On transmettra donc d'un axe à un autre une vitesse régulière, dans un rapport voulu, en choisissant des poulies de rayons qui soient dans un rapport inverse de celui des vitesses angulaires.

Les nombres de tours dans le même temps, 1′ par exemple, sont aussi en raison inverse des rayons, car $\omega = \frac{2n\pi}{60}$ n étant le nombre de tours en 1′, 2π la circonférence du rayon 1. De même $\omega' = \frac{2\pi n'}{60}$, d'où $n : n' :: \omega : \omega' :: R' : R$.

113. Une courroie de communication de mouvement se compose de deux *brins* : le *brin conducteur* qui s'enroule sur le tambour moteur et se déroule de celui auquel le mouvement est communiqué ; et le *brin conduit*, qui se meut inversement. La tension du premier brin dépasse nécessairement celle du second, si ce n'est dans le cas du repos où la courroie est partout également tendue. On dé-

duit des lois de l'élasticité que la somme des tensions des deux brins est constante, même lorsque l'appareil est en mouvement et égale au double de la tension de chaque brin au repos.

Nous avons donné, d'après M. Morin (art. 59), une table qui sert à déterminer les dimensions des courroies; en effet elle indique l'effort nécessaire pour faire glisser sur un tambour une courroie, les valeurs du rapport K de T à t, de l'effort exercé sur chaque brin d'une corde glissant sur un tambour, glissement qui ne doit pas se produire dans le cas actuel.

Pour établir une transmission de mouvement par une courroie, connaissant l'effort Q à transmettre, l'arc d'enroulement de la courroie, on aura, pour déterminer la tension suffisante pour que le glissement de la courroie ne puisse avoir lieu : $T - t = Q$ ou $t(K - 1) = Q$, d'où $t = \frac{Q}{K - 1}$, d'où on déduira la valeur de t et T, à l'aide de la table, ce qui permettra de déterminer la section des courroies, connaissant la ténacité des substances qui les composent par millimètre carré. En leur donnant une valeur supérieure de $\frac{1}{10}$, pour se préserver des extensions des cordes et courroies, on sera certain d'éviter tout glissement.

Cette table montre que l'on peut conduire par des courroies des forces assez considérables en augmentant l'arc enveloppant. La largeur de celles-ci n'a, au contraire, aucune influence sur la résistance au glissement, et il n'y a aucun avantage à rendre cette dimension supérieure à celle qui est nécessaire pour que la courroie puisse résister aux efforts de traction qu'on peut évaluer à $0^k,25$, par millimètre carré de section.

Lors de la mise en mouvement de la poulie motrice, la courroie sur laquelle la poulie glisse d'abord se tend bientôt, étant entraînée par la poulie. Dès que la tension est telle que le frottement de glissement est égal à Q, le mouvement de rotation se produit, le frottement de glissement cesse, et il n'y a plus qu'un frottement de roulement ; le travail est transmis sans perte appréciable, quant à la roideur des cordes, lorsque les courroies sont convenablement tendues et bien flexibles, le frottement des axes étant la principale résistance qu'il y ait alors à évaluer.

114. Pour obtenir une tension toujours suffisante, afin de déterminer le mouvement avec toute certitude sans accroître par une trop forte tension le frottement des axes, on emploie quelquefois un rouleau de tension (fig. 107), reposant par sa gorge sur le brin supérieur de la courroie, et monté sur un levier mobile autour d'un point fixe. Ce levier porte un poids suspendu à son extrémité.

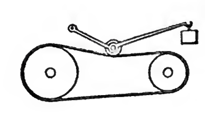


Fig. 107.

On peut, par une construction simple, évaluer la tension produite par le poids suspendu à l'extrémité du levier (produisant l'effet d'un poids Q estimé sur la poulie). Les tensions égales des deux parties du brin de la courroie OA et OB sur lequel s'appuie le rouleau (fig. 108), et le poids Q se faisant équilibre, puisque la figure ne change pas de forme, la direction de ce poids est la bissectrice de l'angle AOB, qu'il est facile de relever sur la courroie. Si l'on prend une longueur OQ pour représenter le poids Q, et qu'on mène par le point Q une parallèle à OB, on obtient une droite OD qui mesure la tension de la courroie. Il est donc facile de régler cette tension en faisant varier la charge Q.

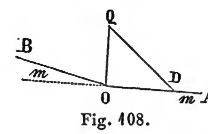


Fig. 108.

L'emploi du rouleau de tension peut permettre de faire varier au besoin l'écartement des poulies (en raison de l'inflexion de la courroie), sans que leur mouvement de rotation varie dans leurs diverses positions, la corde ne faisant que se tendre et relever le poids qui produit toujours la même tension pour déterminer le mouvement.

115. *Chaînes à la Vaucanson.* Quand les forces à transmettre sont assez considérables, la vitesse petite et les axes éloignés, on remplace les poulies par des roues garnies de saillies. Les deux roues sont réunies par une chaîne sans fin en fer, formée habituellement de petits rectangles entrelacés

(fig. 109 et 110), dans lesquels entrent les saillies des roues. Une de celles-ci ne peut se mouvoir sans entraîner l'autre. Ce système, qui engendre beaucoup de frottements, n'est pas ordinairement employé dans les parties des machines qui sont toujours en mouvement.

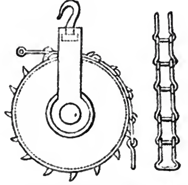


Fig. 109. Fig. 110.

Dans ce système, comme avec les courroies, la même longueur de chaîne, passant sur les deux roues pendant le même temps, vient toujours coïncider avec des arcs égaux en longueur absolue $R\omega$, $R'\omega'$, et on a toujours $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'1}{R}$.

116. *Des chaînes*. Il importe d'entrer dans quelques détails relativement aux divers genres de chaînes qui se rencontrent dans nombre de machines et qui remplacent assez fréquemment les cordes, dont l'extensibilité est un grave défaut dans certains cas.

Les chaînes du commerce (fig. 112) sont composées d'anneaux oblongs, successivement perpendiculaires les uns aux autres ; si elles doivent s'enrouler autour d'une poulie, une rainure devra donc être pratiquée dans la gorge de celle-ci pour les recevoir.

Fig. 111. Fig. 112.

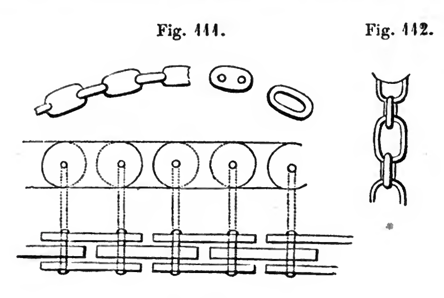


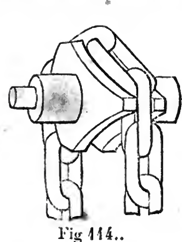
Fig. 113.

Les chaînes plates (fig. 111), sont formées de plaques percées de deux trous, dans lesquels passent des anneaux qui font fonction

de boulons-tourillons. Ces chaînes peuvent s'enrouler autour d'une poulie circulaire, ou mieux encore de forme polygonale, portant des faces de largeur égale aux côtés des plaques.

Enfin, on distingue encore les chaînes dites anglaises (fig. 113). Celles-ci se composent de plaques égales, au nombre de trois au moins, en plus grand nombre s'il s'agit de surmonter de grandes résistances, percées de trous au centre des portions demi-circulaires qui les terminent. Ces plaques sont disposées en deux séries, de manière que les extrémités antérieures des unes correspondent aux extrémités postérieures de celles de l'autre série; elles sont assemblées par des boulons qui traversent les trous circulaires percés au centre de ces extrémités. C'est autour de ces boulons que les éléments successifs peuvent tourner.

Les chaînes plates ou les chaînes anglaises dont nous venons de parler, et qui, par la multiplication des plaques élémentaires, peuvent servir à surmonter des résistances extrêmement considérables, ne pourraient guère être employées pour soulever les fardeaux, au moyen du treuil ou du cabestan, parce qu'il faut alors qu'elles puissent s'infléchir dans tous les sens. Les chaînes à mailles du commerce offrent bien cet avantage, mais elles se rangent difficilement sur la surface du cylindre d'un treuil. M. Neveu a fort heureusement surmonté cette difficulté par l'emploi d'un treuil, dont la circonférence peut recevoir trois chaînons à plat (fig. 114), et dont les parties plus resserrées peuvent recevoir trois chaînons de côté. La chaîne n'ayant pas besoin de s'enrouler plus d'un tour, puisque tout glissement devient impossible par cette disposition, l'action se produit avec une parfaite régularité; ce qui n'a pas lieu pour des chaînes ordinaires et des cylindres sur lesquels les tours de la chaîne s'ajoutent de telle sorte que les saillies des maillons ne correspondent bientôt plus aux vides destinés à les recevoir, par l'effet des irrégularités de la chaîne qui vont en s'accumulant.


Fig 114..

117. Il faut remarquer que, si l'on compare au point de vue du

frottement les diverses chaînes, celles du commerce formées de maillons placés dans des plans perpendiculaires entre eux sont préférables aux chaînes plates ou anglaises. En effet, tandis que, dans celles-ci, chaque plaque en tournant autour du boulon qui l'assemble avec la précédente comme autour d'un tourillon, produit un frottement de glissement, chaque maillon, dans la chaîne commune, accomplit son mouvement de rotation autour du précédent par un simple roulement; et si l'angle des deux maillons consécutifs est assez petit (si la longueur des maillons de la chaîne a été convenablement proportionnée au diamètre du cylindre autour duquel se fait l'enroulement) pour que le point de contact définitif n'atteigne pas la limite où le frottement de glissement commence, on doit concevoir comment il est possible qu'il n'y ait que simple roulement pendant toute la durée du ploiement de la chaîne.

Organes où l'action a lieu par contact immédiat avec glissement.

ENGRENAGES.

118. Le moyen le plus usité de communiquer le mouvement circulaire d'un axe à un autre avec la condition que les vitesses soient dans un rapport déterminé, surtout quand il s'agit d'efforts considérables; et de faire qu'un axe ne puisse jamais se mouvoir indépendamment de l'autre, consiste à monter sur ces axes deux roues tangentes entre elles. Chaque roue porte des saillies qui s'engagent entre les intervalles des saillies de l'autre roue; le mouvement d'une des pièces est ainsi rendu solidaire de celui de l'autre. Ce dispositif constitue l'engrenage (fig. 115).

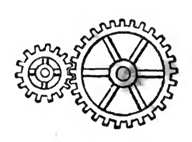


Fig. 115.

On appelle *cercles primitifs* les deux cercles tangents, tracés avec des rayons obtenus en divisant la ligne qui joint les deux centres, c'est-à-dire les points de rencontre d'un plan perpendiculaire aux deux axes avec ceux-ci, dans le rapport inverse des vitesses angulaires des deux axes. La théorie des engrenages consiste à trouver des formes pour les dents, telles que le rapport des vitesses

angulaires soit constant, ou, ce qui est la même chose, que le mouvement ait lieu de la même manière que si deux circonférences tracées avec les rayons obtenus en divisant la ligne des centres en raison inverse des vitesses, se conduisaient l'une l'autre sans glissement; c'est-à-dire que, comme nous l'avons vu pour les rouleaux, R et R′ étant les rayons de ces cercles, $\omega\omega'$ les vitesses angulaires, on ait $R\omega = R'\omega'$. On appelle *dents* les saillies dont les cercles primitifs sont garnis, et qui se poussent l'une l'autre ; on appelle *pas* de l'engrenage l'intervalle compris entre deux parties semblables de deux dents consécutives, mesuré sur les cercles primitifs.

119. *Poussée d'une courbe par une autre.* Nous avons dit que le problème des engrenages consistait à faire mouvoir les deux cercles primitifs par le contact de courbes appelées dents, qui y sont adaptées, comme si ces cercles roulaient l'un sur l'autre. On peut se rendre compte qu'il se produit un glissement dans la poussée de deux courbes quelconques, et déterminer géométriquement le rapport de l'étendue du glissement à l'arc parcouru en chaque instant, par la méthode suivante que nous empruntons aux *Principles of Mecanism* de M. Willis.

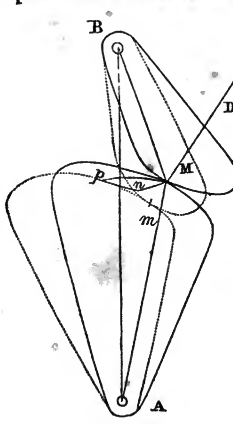


Fig. 116.

Étendue du glissement. Soient A, B (fig. 116) les centres de rotation de deux pièces quelconques qui se conduisent par contact ; BM, AM la position de ces pièces à un instant quelconque du contact ; MD la normale commune en leur point de contact M ; Bm, Am les positions des pièces dans une situation du système infiniment voisine de la première, m étant le nouveau point de contact; p, n les positions nouvelles des points des pièces A et B qui étaient en contact en M. Joignez les points p et n; pour un mouvement infiniment petit, pn sera une droite perpendiculaire à la normale commune MD, le déplacement ne pouvant s'effectuer que suivant l'élément commun, elle sera la

différence $mp - mn$ des arcs qui ont glissé l'un sur l'autre, et elle exprimera l'étendue du *glissement.* De même, pour un mouvement initial, Mp sera une perpendiculaire à AM (la rotation se faisant autour du point A), et Mn à BM ; on a donc :

$$\frac{pn}{p\text{M}} = \frac{\sin.\, p\text{M}n}{\sin.\, pn\text{M}} = \frac{\sin.\, \text{BMA}}{\sin.\, \text{DMB}} = \frac{\sin.(\text{BAM} + \text{ABM})}{\sin.\, \text{DMB}}.$$

On aurait de même, pour l'autre pièce B :

$$\frac{pn}{n\text{M}} = \frac{\sin.\, \text{BMA}}{\sin.\, \text{DMA}}.$$

Ainsi, pour chacune des pièces, l'arc de glissement instantané (pn) *est à l'arc parcouru par le point de contact, comme le sinus de la somme des angles compris entre la ligne des centres et les rayons de contact, est au sinus de l'inclinaison de la normale en* M, *sur le rayon de contact de l'autre pièce.*

Tirant des expressions ci-dessus les deux valeurs de l'arc de glissement pn, on voit que cet arc ne peut devenir nul pendant le mouvement qu'à la condition d'avoir toujours :

$$\text{Sin. BMA} = \sin.\, (\text{BAM} + \text{ABM}) = 0.$$

Ainsi, les courbes ne peuvent se conduire par roulement et sans glisser l'une sur l'autre, qu'autant que les rayons vecteurs du point de contact coïncident avec la ligne des centres.

Par suite, deux circonférences se conduisant par simple contact, satisfont à cette condition, puisque le point de contact est toujours sur la ligne des centres, et elles peuvent seules se conduire sans glissement *dans un rapport de vitesse constant,* car les vitesses instantanées sont inversement proportionnelles aux rayons vecteurs lorsque le point de contact se trouve sur la ligne des centres, comme nous le verrons art. 127. Donc ces rayons sont nécessairement constants et des rayons de cercles, proposition dont nous sommes parti au commencement de ce chapitre.

120. *Rapport entre les profils de deux dents qui se conduisent.* De la condition à laquelle les engrenages doivent satisfaire, de faire mouvoir les deux axes dans un rapport de vitesse constant, c'est-à-dire comme si deux circonférences roulaient l'une sur l'autre, il

résulte que le profil des dents d'une des roues étant donné, celui de la seconde se trouve déterminé.

Soit O′ l'une des roues (fig. 117), *m a*, le profil d'une de ses dents,

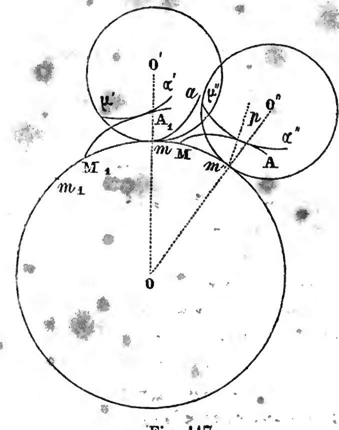


Fig. 117.

que nous supposons quelconque, M A le profil de la dent de l'autre roue qui n'est plus arbitraire, et que nous nous proposons de déterminer. Quand la roue O aura fait une certaine rotation, et que son point M sera venu en M_1, le point *m* en m_1, la deuxième roue aura aussi tourné. La courbe *m a* aura la position $\mu'\,\alpha'$, la dent de la roue O, qui n'a pas cessé de s'appuyer sur la courbe *m a* pour faire tourner la roue O′, aura la position $M_1\,A_1$ et sera tangente à la courbe $\mu'\,\alpha'$, puisqu'elle pousse celle-ci. C'est cette condition que la courbe $M_1\,A_1$ soit dans toutes les positions tangente à la courbe mobile $\mu'\,\alpha'$ qui détermine cette courbe.

Faisons tourner toute la figure autour du point O, de manière que le point m_1 revienne en *m*, la courbe $M_1\,A_1$ reprendra la position M A. Le cercle O′ prendra la position O″, la courbe $\mu'\,\alpha'$ la position $\mu''\,\alpha''$, et sera tangente à la courbe M A. Cette dernière courbe sera donc tangente à la courbe $\mu'\,\alpha'$ dans toutes ses positions (et en est dite l'enveloppe), quand on fait éprouver à toute la

figure, ou plutôt au cercle O′, puisque le cercle O a accompli deux rotations égales et contraires, la rotation quelconque que nous venons de supposer. Or, dans la position O″ on a : $m''m = mm_1$, $m''\mu'' = m\mu' = mm_1$. Le cercle O′ se trouve donc en O″ dans la même position que s'il avait roulé librement sur le premier cercle O. Il s'ensuit que pour *construire la courbe* MA, *il faut faire rouler le cercle* O′ *sur le cercle* O *supposé fixe, la courbe* MA *sera l'enveloppe de l'espace parcouru, dans ce mouvement, par la courbe* MA.

L'étude géométrique des courbes enveloppes offrant beaucoup d'intérêt, nous devons nous y arrêter, ce qui nous permettra ensuite d'exposer d'une manière complète la théorie des engrenages. Nous allons entrer dans quelques détails à leur égard ; mais d'abord il faut nous occuper du roulement d'un cercle sur un autre, indépendamment des courbes qui peuvent être assemblées avec eux pour former les dents des engrenages (1).

ROULEMENT D'UNE COURBE SUR UNE AUTRE COURBE.

121. Considérons une courbe mobile assujettie à rester dans toutes ses positions, tangente à une courbe fixe.

La courbe mobile roule sur la courbe fixe (fig. 118 et 119),

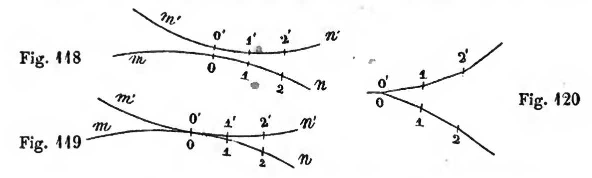


Fig. 118

Fig. 119

Fig. 120

lorsque le lieu du contact parcourt à la fois sur les deux périmètres des arcs égaux en longueur.

Soient *mn*, *m′n′* les courbes données : marquons un certain nombre de points 0, 1, 2, etc., 0′ 1′ 2′, etc., tels que les axes 0 1, 1 2, 2 3..... soient respectivement égaux en longueur aux arcs 0′ 1, 1′ 2′. ...

(1) Une grande partie de ce qui suit est extrait du *Cours de Machines*, professé à l'École Polytechnique par M. Savary, de 1829 à 1837.

Si à l'origine les deux courbes se touchent par les points 0 et 0′, dans la suite du roulement elles se toucheront par les couples 1 et 1′, 2 et 2′....

Réciproquement, lorsqu'à un certain instant la tangence des courbes aura lieu en un couple de points 2 et 2′, les points antérieurement confondus 0 et 0′, par exemple, seront distants d'arcs égaux du nouveau contact.

Concevons maintenant les deux courbes comme composées d'éléments infiniment petits, égaux de part et d'autre (fig. 120), et considérons les points 0, 1, 2, etc., 0′, 1′, 2′, etc., comme les sommets des polygones dont ces petits éléments sont les côtés; dans le roulement, les côtés correspondants devront tour à tour se superposer. Le point 1′, pour venir se confondre avec le point 1, décrira un petit arc de cercle ayant pour centre le sommet 0 0′. Tous les points de la courbe mobile, ou ceux qui, faisant corps avec elle, partageront son mouvement, décriront donc en même temps, autour du même point 0 0′, à la limite autour du point de contact instantané, des arcs de cercle infiniment petits.

122. *Roulement d'un cercle sur un autre. — De l'épicycloïde.* Deux cercles O et O′, situés dans le même plan (fig. 121), sont tangents l'un à l'autre en A. Le cercle O′ est mobile, et partant de la position initiale, il roule sur le cercle O qui est fixe. Dans ce mouvement, le point a, confondu à l'origine avec A, mais appartenant au cercle O′, prendra des positions successives a, a_1, a_2, etc., telles que les arcs $a_1 A_1$, $a_2 A_2$ seront égaux en longueur aux arcs $A A_1$, $A A_2$, etc. Le lieu de toutes ces positions a, a_1, a_2, etc., est une épicycloïde; tous les points de la circonférence mobile décrivent à la fois des épicycloïdes égales.

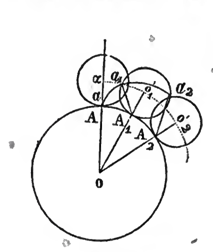


Fig. 121.

L'épicycloïde est extérieure ou intérieure, selon que le cercle mobile O′ a son centre au dehors ou au dedans dans la circonférence O qu'il touche en roulant.

Construction par points. Pour construire par points une des

courbes décrites par un point de la circonférence du centre O′, celle dont l'origine est en A, par exemple, on prend sur un cercle de rayon $OO' = OA + O'a$ des positions individuelles du centre O′, telles que O'_1, O'_2, etc. Si l'on porte sur une quelconque de ces circonférences, par exemple O'_2, à partir du point de contact A_2, un arc $A_2 a_2$ égal en développement à l'arc AA_2, le point a_2 appartiendra à la courbe cherchée.

Normale à l'épicycloïde. Le déplacement infiniment petit du cercle O′ roulant sur la circonférence O, a lieu, pour la position individuelle O'_1, autour du point de contact A_1 comme autour d'un centre instantané de rotation. Dans ce déplacement, tous les points de la circonférence O'_1 se meuvent sur de petits arcs de cercle ayant A_1 pour centre. Parmi ces arcs, celui que décrit le point générateur situé en a_1 est un élément de l'épicycloïde, le rayon $a_1 A_1$ de ce petit arc est donc normal en a_1 à cette courbe elle-même.

La normale à l'épicycloïde est donc la corde du cercle mobile qui joint le point décrivant au point de contact instantané des circonférences. La tangente à l'épicycloïde est la corde qui joint le point décrivant et le point du cercle diamétralement opposé au même point de contact (angle droit mesuré par une demi-circonférence).

123. *Cas particuliers.* Si le rayon OA augmente indéfiniment, à la limite la circonférence O devient une ligne droite, et l'épicycloïde $a a_1 a_2$, etc., une cycloïde. Les propositions précédentes s'appliquent sans difficulté à ce cas.

Développantes. Si le rayon (fig. 122) OA, ayant une valeur constante et finie, le rayon O′A augmente indéfiniment, à la limite la circonférence mobile O′ devient une ligne droite, et l'épicycloïde une développante du cercle fixe. La droite génératrice prend successivement les directions $a_1 A_1$, $a_2 A_2$, etc., des tangentes en A_1 A_2, etc., à la circonférence O. Le point décrivant a se meut comme s'il était l'extrémité d'un fil enroulé sur cette circonférence, et que l'on déroulerait en tenant constamment tendues les portions successivement dévelop-

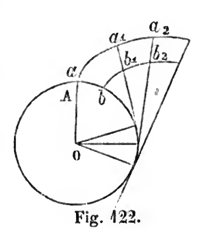


Fig. 122.

pées $a_1 A_1$, $a_2 A_2$, etc.; par construction les longueurs rectilignes $a_1 A_1$, $a_2 A_2$, etc., sont donc égales aux arcs AA_1, AA_2, etc., et chaque élément de la développante se confond avec un petit arc de cercle décrit des points A_1, A_2 comme centres. Les diverses positions de la droite génératrice sont donc normales à la courbe engendrée, et deux normales infiniment voisines se coupent sur la circonférence O elle-même.

Si l'on considère sur le fil enroulé d'autres points tels que b_1, comme générateurs d'autres développantes semblables telles que $b\,b_1\,b_2$ ... ces courbes auront pour normales communes les portions de fil successivement tendues; l'écartement $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ ... de deux quelconques d'entre elles, suivant les différentes normales, sera constant et partout égal à l'écart initial ab de leurs points décrivants sur la circonférence O.

124. Nous pouvons appliquer aux courbes que nous venons d'étudier les résultats de l'art. 119, et calculer le glissement qui se produirait dans des engrenages dont les dents auraient pour profil de semblables courbes.

Les courbes qui se poussent sont deux développantes de cercle (fig. 123), forme que l'on peut donner aux dents, comme nous le prouverons bientôt. On le comprend facilement en remarquant que ces courbes ont toutes deux une normale commune MD et sont tangentes en M; menant BD perpendiculairement à cette normale commune MD, et remarquant que, pour une développante, cette perpendiculaire est constante, on a, en faisant $BD = r = 1$:

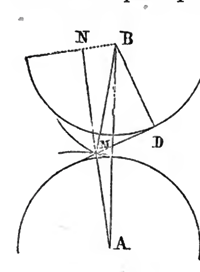


Fig. 123.

$$BD = BM \sin. DMB \text{ ou } \sin. DMB = \frac{r}{BM}.$$

D'où l'on voit que le rapport trouvé art. 119 devient :

$$\frac{pn}{pM} = \frac{BM \sin. BMA}{r} = \frac{BN}{r}$$

c'est-à-dire que le rapport de l'arc de glissement pn à l'arc décrit par le rayon vecteur A M du point de contact M, croît pour la pièce A, comme la perpendiculaire BN menée de l'autre centre de rotation sur le prolongement de ce rayon vecteur.

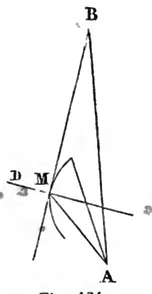


Fig. 124.

Les courbes étant l'une une épicycloïde tournant autour du centre A, *et l'autre une droite tournant autour de* B, qui, nous l'avons vu, est tangente en M à l'épicycloïde (fig. 124), l'angle DMB devient droit, et le rapport

$$\frac{pn}{pM} = \text{sin. BMA} = \text{sin. (BAM + ABM)}$$

croît comme le sinus de BMA, ou comme la distance du point de contact à la ligne des centres.

DES COURBES ENVELOPPES.

125. Reprenons en général le cercle O′ roulant sur la circonférence O (fig. 125), soient AA_1 A_2 A_3, etc., un certain nombre de points du contact instantané; $a_1 A_1$, $a_2 A_2$, $a_3 A_3$, etc., des arcs du cercle mobile, égaux en longueur aux arcs correspondants AA_1 AA_2 AA_3, etc., sur le cercle fixe $a a_1$ a_2 a_3.

Concevons en même temps une courbe ab faisant corps avec le cercle mobile O′, et prenant successivement quand il roule les positions $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, etc. Chacune de ces courbes individuelles coupera la précédente et les points d'intersection consécutifs i', i'', i''', etc., seront autant de sommets d'un polygone curviligne qui se changera en une courbe continue si les contacts AA_1 A_2 A_3, etc., sont très rapprochés; les côtés Ai, ii', $i'i''$, etc., considérés comme infiniment petits, seront les éléments de cette courbe continue; elle porte le nom d'*enveloppe*, et la courbe ab celui d'*enveloppée*. Dans chaque position individuelle, l'enveloppée a un élément qui lui est commun avec l'enveloppe a_1 b_1, avec

$i\,i'$, $a_2\,b_2$, avec $i'\,i''$, etc.; à la limite, chaque enveloppée individuelle est tangente à l'enveloppe (1).

Cherchons directement les points de tangence communs à l'enveloppe et aux enveloppées successives.

Considérons sur une des positions individuelles de l'enveloppée, sur $a_3 b_3$ par exemple, le point e_3, pour lequel la normale $A_3 e_3$ va

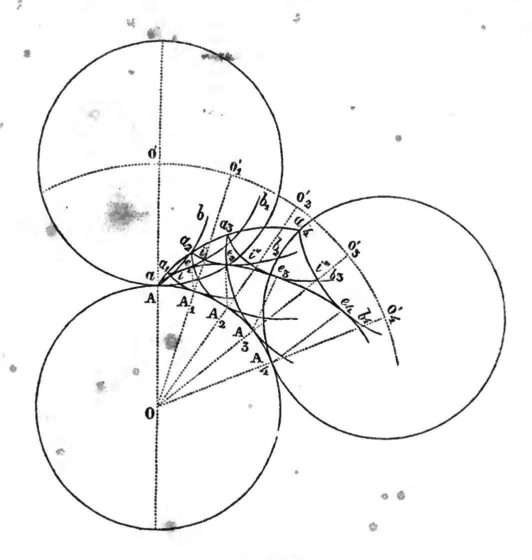


Fig. 125.

passer par le contact correspondant A_3 des circonférences fixe et mobile.

Tous les points de $a_3 b_3$, pour se transporter sur l'enveloppée

(1) Les deux courbes $a\,b$ et $A\,i\,i'\,i''\,i'''$, etc., sont l'une par rapport à l'autre réciproquement enveloppe et enveloppée. Si la circonférence O, devenue mobile et emportant avec elle la courbe $A\,i\,i'\,i''$, roulait sur la circonférence O' devenue fixe, les intersections consécutives des différentes positions de $A\,i\,i'\,i''$, etc., détermineraient comme limite la courbe $a\,b$.

infiniment voisine $a_4 b_4$, décrivent autour de A_3, comme centre instantané de rotation, des arcs de cercle infiniment petits.

Parmi tous ces arcs, celui que décrit le point e_3 se confond avec un élément de la courbe même $a_3 b_3$ (puisque $A_3 e_3$ est sa normale); le point e_3 ne sort donc pas de cette enveloppée en passant à l'enveloppée suivante. Les deux enveloppées consécutives se coupent donc quelque part en i''', à une distance infiniment petite de e_3. Ce dernier point est donc situé sur l'élément $i'' i'''$, commun à l'enveloppée $a_3 b_3$ et à l'enveloppe. A la limite, la normale $A_3 e_3$ est la normale commune aux deux courbes, e_3 est leur point de tangence.

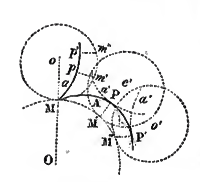
Ainsi la normale commune à l'enveloppe et à chaque enveloppée passe par le contact correspondant des circonférences fixe et mobile; de là un moyen de construire par points une courbe enveloppe. Si l'on trace une des positions individuelles du cercle qui roule, telle que O'_3, et relativement à cette position celle de l'enveloppée $a_3 b_3$; si, par le contact des circonférences A_3 on mène une normale $A_3 e_3$ à l'enveloppée décrite, e_3 sera le point commun à cette enveloppée individuelle et à l'enveloppe cherchée.

Si l'enveloppée ab est géométriquement définie, on saura, pour une position donnée $a_3 b_3$, lui mener une normale par un point extérieur A_3. Si l'enveloppée est seulement tracée sur le cercle O, sans être connue par ses propriétés géométriques, on obtiendra graphiquement le point e_3 par où la normale $A_3 e_3$ doit passer, en décrivant, après quelques essais, du point A_3 comme centre, un arc de cercle qui touche seulement la courbe $a_3 b_3$; le point de tangence sera le point e_3 qu'il fallait déterminer.

Dans bien des cas, les arcs de cercle décrits des centres $A A_1 A_2$, pour déterminer les points de l'enveloppe $e_1 e_2 e_3$, se confondront dans une petite étendue avec l'enveloppe elle-même, et ils se raccorderont à très peu près entre eux si les centres $A_1 A_2$, etc., sont assez rapprochés.

126. C'est d'après ces principes que M. Poncelet a proposé une méthode pour obtenir le tracé des dents d'une roue, celui des dents de la seconde roue étant déterminé. Voici en quoi elle consiste :

Le profil MA (fig. 126), des dents de la roue O étant donné, pour construire celui des dents de la roue o, il faut faire rouler le cer-

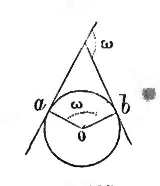

Fig. 126.

cle o sur le cercle O, et de chaque point de contact M′, M″, abaisser une perpendiculaire M′P, M″P′ sur la courbe MA. Les pieds P, P′, sont des points de la courbe Ma, profil des dents de la roue o.

Mais, pour faire cette construction, il n'est pas nécessaire de déplacer le cercle o, il suffit de prendre sur sa circonférence des arcs Mm', Mm'', égaux aux arcs MM′, MM″, et de mener les normales $m'p$, $m''p'$. Pour cela, avec des rayons égaux à M′P, M″P′, on décrit des points m', m'', de petits arcs de cercles suffisamment rapprochés, et l'on trace la courbe Ma, tangente à tous ces cercles, qui est la courbe cherchée.

Pour que ce tracé fut tout à fait satisfaisant, il faudrait que les arcs de cercle en se raccordant pussent fournir un tracé continu, non seulement par points mais par éléments linéaires. Pour cela, ils devraient avoir pour centres, non seulement des points de la normale, mais les centres de courbure (1) de l'enveloppe sur ces nor-

(1) On appelle centre de courbure d'une courbe le centre du cercle, dit cercle osculateur, qui a deux éléments communs avec la courbe, et dont la courbure est par suite la même que celle de la courbe au point commun.


Fig. 127.

Pour bien comprendre ce qu'on entend par le cercle osculateur, considérons un cercle o (figure 127) auquel on mène une tangente au point a, puis des tangentes en des points quelconques plus ou moins voisins. Pour un point quelconque b, l'angle des deux tangentes ω sera égal à l'angle au centre des deux rayons oa, ob, et s étant la longueur de l'arc ab, on aura toujours : $R\omega = s$ ou $R = \frac{s}{\omega}$.
R est donc le rapport de la longueur d'un arc de cercle à l'angle des deux tangentes, rapport indépendant de la position des tangentes ; donc, le rayon est la mesure de la courbure de deux éléments consécutifs du cercle, qui se confondent avec deux tangentes infiniment voisines ; donc cette courbure est constante.

La courbure de deux éléments consécutifs d'une courbe sera mesurée par le rayon du cercle ayant deux éléments communs, deux tangentes infiniment voisines communes avec cette courbe. Le centre de ce cercle sera le centre de courbure de la courbe pour ces éléments.

males. Or, il existe entre les rayons de courbure de l'enveloppe et de l'enveloppée, au point où elles se touchent, une relation très simple, qui permet de les déduire facilement l'un de l'autre.

127. Avant de déterminer cette relation, nous ferons remarquer qu'on peut déduire de ce qui précède un théorème très général que nous avons supposé dans la démonstration de l'art. 119. Si deux courbes quelconques se poussent en tournant autour de deux centres, les deux éléments en contact seront tangents et auront une normale commune ; ils pourront donc être considérés pour un instant comme appartenant à une enveloppe et à une enveloppée ; le point de rencontre de la normale commune avec la ligne des centres, partagera celle-ci en deux parties qui seront en rapport inverse des *vitesses angulaires instantanées*.

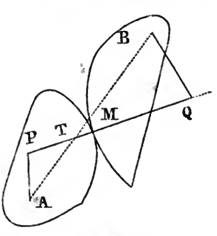


Fig. 128.

En effet, ce point de rencontre ne sera que le point de contact de deux circonférences primitives, qu'on peut supposer exister pour l'instant pendant lequel les éléments en contact appartiennent à une enveloppe et à une enveloppée adaptées à ces circonférences primitives comme art. 125. Donc, dans les données de la figure 128, quelles que soient les courbes A et B, les vitesses étant mesurées par les rayons des circonférences primitives qui se touchent en T, on aura :

$$V_1 : V_2 :: BT : AT.$$

128. *Centre de courbure de l'enveloppe.* Considérons une position quelconque Ω du cercle O′ (fig. 129), pour laquelle il est tangent en α à la circonférence O sur laquelle il roule. Soit alors amb la position de l'enveloppée, AmB celle de l'enveloppe, m le point de contact de ces deux courbes, $C\alpha mC'$ leur normale commune, que nous savons passer par le point de contact α ; prenons sur les deux circonférences deux arcs infiniment petits, égaux en longueur, $\alpha\alpha_1$, $\alpha\alpha'$; les points α' et α_1, après un très petit déplacement du cercle Ω roulant sur le cercle O, devront coïncider. Alors les rayons $O\alpha_1$, $\Omega\alpha'$ se trouveront sur le prolongement l'un de l'autre, comme actuellement les rayons $O\alpha$, $\Omega\alpha$, et dans le passage de la position actuelle

à cette position voisine, le rayon $\Omega\alpha'$ tournera évidemment d'un angle égal à la somme des deux angles $\alpha O \alpha_1$, $\alpha\Omega\alpha'$, angle que font entre eux $O\alpha_1$ et $\Omega\alpha'$.

Si C et C' sont pour le point m les centres de courbure de AmB et de amb, et que l'on mène par ces points les droites $C\alpha_1 m$, $C'm'\alpha'$, m_1 et m' seront les points des deux courbes par lesquelles elles se toucheront, quand le contact des deux cercles aura lieu au point α' α_1. En effet, dans la nouvelle position des cercles, la normale commune aux deux courbes devra passer par leurs centres de

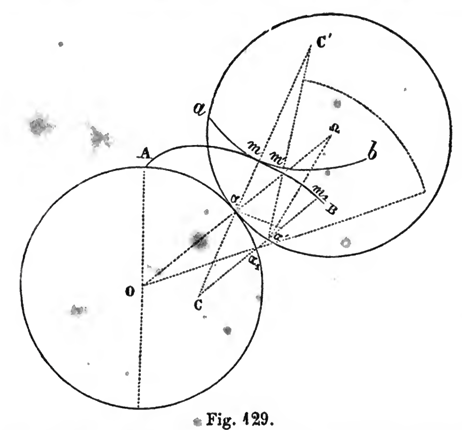


Fig. 129.

courbure, qui sont encore C et C', et par le nouveau point de contact α_1, avec lequel α' se confond alors. Le rayon prolongé $C'\alpha'$ sera donc venu se placer dans le prolongement de $C\alpha_1$; il aura donc tourné d'un angle égal à la somme des deux angles $\alpha C \alpha_1$, $\alpha C' \alpha'$.

Mais dans le passage d'une position à l'autre, les deux droites $\Omega\alpha'$, $C'\alpha'$, qui se meuvent simultanément en comprenant entre elles un angle constant, tourneront d'une même quantité angulaire. On aura donc l'égalité des deux rotations que nous venons de déterminer, c'est-à-dire :

$$\alpha O \alpha_1 + \alpha\Omega\alpha' = \alpha C \alpha_1 + \alpha C' \alpha'.$$

Or, si je désigne par ρ et ρ' les rayons de courbure Cm, $C'm$, par

φ l'angle $C'\alpha\Omega$ de la normale commune aux deux courbes avec la ligne des centres $O\Omega$, par p la portion de normale αm, par ds les arcs infiniment petits égaux entre eux, $\alpha\alpha_1$, $\alpha\alpha'$, qui peuvent être considérés comme de petites lignes droites faisant l'une et l'autre, avec une perpendiculaire à la normale commune $C\alpha m C'$, menée par le point α l'angle φ, on trouve :

$$\alpha O \alpha_1 = \frac{ds}{R}\ \alpha\Omega\alpha' = \frac{ds}{R'};\ \alpha C \alpha_1 = \frac{ds \cos.\varphi}{\rho - p}\ \alpha C' \alpha' = \frac{ds \cos.\varphi}{\rho' + p}.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité précédente, et supprimant le facteur commun ds, on obtient enfin :

$$(a)\quad \cos.\varphi \left\{ \frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p} \right\} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Telle est la relation simple que fera connaître un des rayons de courbure lorsque l'autre sera donné. Si le centre C' tombe du même côté que α par rapport au point m, ρ' devra être négatif ; il en

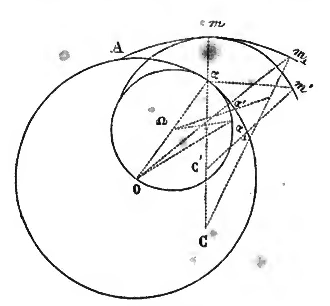


Fig. 130.

sera de même pour R' si le centre du cercle mobile est situé à l'intérieur du cercle fixe, si le roulement est intérieur. Ainsi, dans les données de la fig. 130, la relation (a) devient :

$$\cos.\varphi \left(\frac{1}{\rho' - p} - \frac{1}{\rho - p} \right) = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}.$$

129. *Déplacement simultané du contact sur l'enveloppe et l'enveloppée.* Avant d'appliquer la relation (a) à des constructions

géométriques, il sera utile d'examiner de quelle manière le lieu du contact entre l'enveloppée et l'enveloppe se déplace sur ces deux courbes, dans les déplacements successifs de la première, qui servent à déterminer la seconde lors du roulement du cercle Ω sur la circonférence O.

Lorsque les cercles, d'abord tangents en α (fig. 129), se toucheront après un déplacement infiniment petit, par les points α', α_1, les courbes d'abord tangentes en m, viendront, ainsi qu'on l'a vu, se toucher par les points m', m_1. Le contact des circonférences aura parcouru, sur chacune d'elles, des arcs égaux $\alpha\alpha_1 = \alpha\alpha' = ds$: le contact de l'enveloppée et de l'enveloppe aura parcouru sur l'enveloppée l'arc $mm' = \rho' \, (\alpha C' \alpha') = \rho' \dfrac{ds \cos. \varphi}{\rho' + p}$; sur l'enveloppe l'arc $mm_1 = \rho \, (\alpha C \alpha_1) = \rho \, \dfrac{ds \cos. \varphi}{\rho - p}$. La différence des arcs élémentaires parcourus ici dans le même sens, sera donc :

$$mm_1 - mm = ds \cos. \varphi \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' + p}\right)$$

$$= p\,ds \cos. \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p}\right).$$

Comme on le voit, en réduisant au même dénominateur les termes des deux expressions; donc enfin d'après la relation *(a)*

$$mm_1 - mm' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) p\,ds.$$

Le roulement étant toujours extérieur, le lieu du contact peut se déplacer en sens contraire sur l'enveloppée et sur l'enveloppe; c'est ce qui a lieu lorsqu'un des centres de courbure, C' par exemple, se trouve sur la normale entre le point m et α; alors m_1 et m' sont par rapport à la normale et au point m de côtés opposés, et l'expression $\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}\right) p\,ds$ représente, quant à sa valeur absolue, la somme des petits chemins mm_1 et mm'; mais on peut toujours la regarder comme leur différence, en donnant, ainsi que l'analyse l'indique, à des déplacements qui ont lieu en sens opposés, des signes contraires.

130. *Détermination graphique des centres de courbure.* Je

reviens au tracé d'une enveloppe et à la recherche de ses centres de courbure; la relation (a) en fournit immédiatement une détermination graphique. En effet, si j'élève (fig. 131), au point de con-

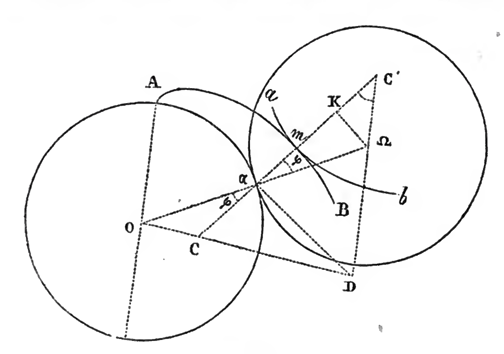


Fig. 131.

tact des circonférences α, une perpendiculaire αD sur la normale CαmC', cette perpendiculaire rencontrera les droites OCC'Ω menées par les centres O et C, Ω et C' en un seul point.

En effet, le triangle αC'D est semblable au triangle ΩC'K, obtenu en menant ΩK perpendiculaire à CC', on a donc :

$$\alpha D : \alpha C' :: \Omega K : C'K,$$

or : $\alpha C' = \rho' + p$, $\Omega K = R' \sin. \varphi$, $C'K = (\rho' + p) - R' \cos. \varphi$, donc :

$$\alpha D = \frac{(\rho' + p) R' \sin. \varphi}{(\rho' + p) - R' \cos. \varphi}.$$

De même, le triangle αCD est semblable au triangle COK' qu'on obtiendrait en abaissant du point O une perpendiculaire sur le prolongement de CC'; on aurait pour le point D déterminé par la rencontre des deux lignes OC et αD,

$$\alpha D : \alpha C :: OK' : CK',$$

or : $\alpha C = \rho - p$, $OK' = R. \sin. \varphi$, $CK' = R \cos. \varphi - (\rho - p)$, donc :

$$\alpha D = \frac{(\rho - p) R \sin. \varphi}{R \cos. \varphi - (\rho - p)}.$$

Mais la relation (*a*) (art. 128) donne, en transposant le deuxième et le troisième terme et réduisant au même dénominateur

$$\frac{R\cos.\varphi-(\rho-p)}{(\rho-p)R}=\frac{(\rho'+p)-R'\cos.\varphi}{(\rho'+p)R'},$$

qui renversées, sont les mêmes que les précédentes divisées par sin. φ.

Les deux valeurs de αD sont donc égales, les trois droites αD, OCD, C′ΩD, se coupent donc en un même point.

131. *Tracé de l'enveloppe à l'aide de ses rayons de courbure.* Si donc le centre de courbure C′ est connu, et que l'on cherche le centre C, on élèvera la perpendiculaire αD, on mènera la droite C′ΩD, et le point D étant ainsi déterminé, on mènera la droite OCD qui rencontrera la normale C α *m* C′ au point C cherché; l'arc de cercle décrit avec un rayon égal à C *m* sera, dans une petite étendue, celui qui s'écartera le moins de l'enveloppe A *m* B.

Si l'enveloppée A *m* B est définie par ses propriétés, le centre de courbure C′ au point *m* sera connu, aussi bien que la direction de la normale C α *m* C′; lorsque cette courbe est seulement tracée on a vu comment la direction de la normale pouvait s'obtenir graphiquement. Si, dans ce cas, on cherche de quel centre, sur cette normale, peut être décrit l'arc de cercle le plus approchant de la courbe *a m b* dans le voisinage du point *m*, le point ainsi déterminé pourra être pris pour le point C′. La construction qui précède fera ensuite connaître le centre C et une partie de l'enveloppe A *m* B avec le même degré de précision que, dans une amplitude comparable, l'arc décrit de C′ comme centre représente l'enveloppée.

132. *Enveloppées concentriques.* La position d'un centre de courbure C dépendant uniquement de la direction de la normale C C′, et de la position du centre conjugué C′ (fig. 132), diminuons, suivant toutes les normales à l'enveloppée *a m b*, tous ses rayons de courbure de quantités égales *mm′*, *nn′*, *oo′*; augmentons de la même quantité tous les rayons de courbure de l'enveloppe A *m* B, et nous obtiendrons deux nouvelles courbes *a′ m′ b′*, A′ *m′* B′ qui seront évidemment encore l'une à l'autre enveloppe et enveloppée.

Dans le cas particulier où l'enveloppée *a m b* est un cercle, toutes

les circonférences qui lui seront concentriques donneront naissance à des enveloppes normalement équi-distantes, ayant toutes le même centre de courbure. Toutes ces enveloppées circulaires ont pour limite un point, leur centre commun; la courbe décrite par le centre commun lors du roulement est la limite des enveloppées correspondantes.

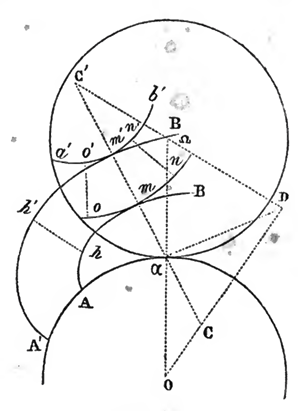


Fig. 132.

133. *Autre conséquence du tracé précédent.* Si l'on remplace dans la pratique, comme nous le verrons plus loin, pour de petites longueurs, les courbes difficiles à tracer par des arcs de cercle, le centre de courbure de l'enveloppée sera déterminé par un tracé très simple, dès qu'on connaîtra le centre du cercle substitué à la courbe enveloppe.

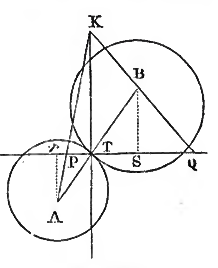


Fig. 133.

Ainsi A et B étant les centres de rotation de deux circonférences qui se touchent en T (fig. 133), par ce point menons une droite quelconque PTQ, et soit pris arbitrairement sur cette droite un point P pour centre d'un cercle de rayon PT. L'enveloppe de ce

cercle aura un centre de courbure pour le contact du point T qu'il sera facile de déterminer. En effet, ce centre sera sur la ligne PQ qui est la normale passant au point T, commune à l'enveloppe et à l'enveloppée; si donc on élève la perpendiculaire KT sur PQ, cette ligne rencontrera AP en un point K, tirant BK; cette ligne rencontrera PTQ en un point Q, qui sera le centre de courbure cherché.

134. *Rayon de courbure de l'Épicycloïde.* Si le point auquel se réduit l'enveloppée comme nous le supposions art. 132, appartient à la circonférence Ω elle-même, l'enveloppe limite est une épicycloïde (fig. 134). Soit, pour une position de Ω dans le roulement, *m* le point décrivant avec lequel se confond le centre de courbure C′, pour obtenir le centre de courbure de l'épicycloïde, il suffira de mener le diamètre *m*ΩD, et la ligne OD déterminera sur la normale *m*αC le centre C de l'épicycloïde en *m*. En effet, le point D de la construction générale est placé sur la circonférence Ω (puisque la ligne αD est perpendiculaire sur *m*α).

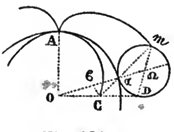


Fig. 134.

Le lieu AC des centres des courbures C est une autre épicycloïde à laquelle sont tangentes les normales de la première. Si au point C on élève C6 perpendiculaire sur C*αm*, l'épicycloïde AC pourra être considérée comme décrite par le point C lui-même, dans le roulement d'un cercle mobile du diamètre α6 sur un cercle fixe dont 6O serait le rayon. Si le roulement du cercle Ω se prolongeait en sens contraire au delà du contact initial A, on obtiendrait évidemment une seconde partie de l'épicycloïde semblable à la première. Au point de rebroussement le rayon de courbure est nul.

135. *Epicycloïde allongée et raccourcie.* Lorsque le point auquel se réduit l'enveloppée est extérieur à la circonférence Ω, la courbe décrite dans le roulement (fig. 135), l'enveloppe de toutes ses positions, porte le nom d'épicy-

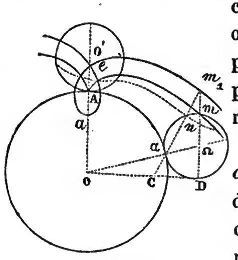


Fig. 135.

cloïde allongée. Pour tracer la partie voisine de la position m_1 du point décrivant, joignons $m_1\Omega$, le point m_1 au centre Ω du cercle mobile ; le point m sur la circonférence décrira une épicycloïde ordinaire. Le centre de courbure de l'enveloppe ou de la courbe cherchée, l'enveloppée se réduisant à un point qui est son centre de courbure, sera déterminé par la construction générale qui donnera un centre C, d'où l'on pourra décrire avec le rayon Cm_1 un petit arc de cercle qui se confondra avec un arc de la courbe. Si A est la position initiale de m, a celle de m_1; les diverses positions du rayon de longueur constante $m_1 m \Omega$ seront données par la condition arc $A\alpha =$ arc αm.

L'épicycloïde raccourcie que la figure représente ponctuée est la courbe décrite dans le roulement par un point n intérieur au cercle. On la construira de la même manière que l'épicycloïde allongée. On obtiendrait des courbes analogues par le roulement de Ω à l'intérieur de O.

136. *Courbe enveloppe d'un cercle.* En même temps que le point m de la circonférence Ω décrit l'épicycloïde Am, un petit cercle (fig. 136), dont ce point m est le centre et $mN = mN_1 = r$ le rayon, engendre une courbe enveloppe ayant, ainsi qu'on l'a vu, mêmes normales et mêmes centres de courbure que l'épicycloïde : les deux éléments N, N_1 du petit cercle *enveloppée* que rencontre normalement une normale αm à l'épicycloïde, appartiennent à l'enveloppe dont il s'agit. Cette enveloppe symétrique comme l'épicycloïde, de part et d'autre de la ligne OAO', a deux points de rebroussement en ε, ε_1 sur la courbe AC, lieu des centres de courbure. On déterminera facilement $\varepsilon, \varepsilon_1$, en remarquant que pour ces points le rayon de courbure de l'enveloppe est nul, et celui de l'épicycloïde $= r$.

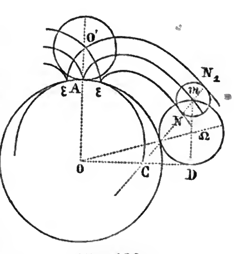


Fig. 136.

Dans les applications la seule portion utile de la courbe-enveloppe que l'on vient de considérer est la partie intérieure εN, ou plus exactement la partie de cette branche située au dehors de la circonférence O. L'origine de cette partie de la courbe, sur la cir-

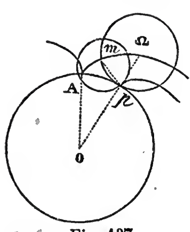


Fig. 137.

conférence O, est un point p très voisin du rebroussement ε, et tel que l'arc Ap (fig. 137) soit égal en longueur à l'arc soutendu, sur la circonférence O′, par le rayon r du petit cercle enveloppé.

En effet, lorsque le point décrivant m de l'épicycloïde est arrivé à une position telle que le petit cercle de rayon r, dont m est le centre, passe par le contact instantané de O et de Ω, mp est la normale à l'épicycloïde, p le point de l'enveloppe situé sur la circonférence O et arc $mp =$ arc Ap.

137. *Épicycloïde enveloppe d'un rayon du cercle mobile.*

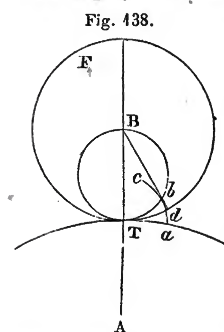


Fig. 138.

Si l'enveloppée est un rayon Bb du cercle mobile F, l'enveloppe cd est encore une épicycloïde (fig. 138). En effet, concevons un second cercle mobile dont le diamètre soit le rayon BT du premier, Tb normale commune à l'enveloppée et à l'enveloppe, est perpendiculaire sur Bb. Le point de rencontre b est donc sur le second cercle mobile. Sur ce cercle, l'angle obtenu en joignant b au centre est double de l'angle TBb. Or, comme son rayon est égal à $\frac{1}{2}$ BT $= \frac{1}{2}$ R, l'arc Td aura pour mesure le produit R (TBb) et l'arc Tb le produit égal $\frac{R}{2}$ 2 (TBb). Les deux arcs Tb, Td sont donc égaux et comme par construction T$d =$ Ta, puisque le cercle F roule sur le cercle A, on aura aussi T$a =$ Tb. Le point b engendrera donc, dans le roulement du cercle dont le diamètre est BT sur la circonférence O, la courbe enveloppe du rayon Bb. Cette enveloppe est donc une épicycloïde.

138. *Épicycloïde enveloppe d'une autre épicycloïde.* Plus généralement (fig. 139), si l'enveloppée amb est une épicycloïde engendrée par un point du cercle U d'un rayon quelconque, roulant

dans l'intérieur du cercle Ω, l'enveloppe AmB sera l'épicycloïde décrite par le même point du même cercle U, roulant extérieurement sur la circonférence O.

En effet, on aura par construction arc $m\alpha$ = arc $a\alpha$ et arc $m\alpha$ = Aα, donc arc $a\alpha$ = arc Aα. $m\alpha$ sera donc la normale commune aux deux courbes amb, AmB : elles seront l'une à l'autre enveloppée et enveloppe, dans le roulement du cercle Ω sur le cercle O. L'épicycloïde amb devient un point si les centres U et Ω

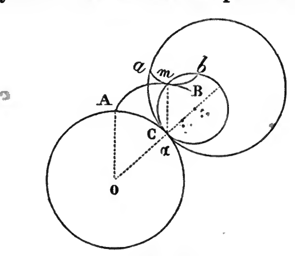


Fig. 139.

se confondent; un rayon du cercle Ω si le rayon du cercle U est moitié du rayon du cercle Ω. Ce second cas particulier vient d'être traité directement.

139. *Développante de cercle enveloppe d'une autre développante.* Si l'enveloppée est une développante amb (fig. 140) d'un cercle ΩC′

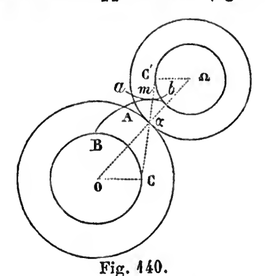


Fig. 140.

concentrique à Ω, et qu'on trace un cercle OCB concentrique avec O, dont le rayon $OC = \frac{R}{R'}$ (ΩC′), chaque normale C′$m\alpha$C,

passant par le point de contact des deux circonférences primitives, sera évidemment tangente à la fois aux deux circonférences ΩC′ et OC. C*m* est donc le rayon de courbure de l'enveloppe, comme C′*m* est celui de l'enveloppée. La courbe BA*m* est donc une développante du cercle OC, comme *amb* une développante du cercle ΩC′.

140. Ce qui précède suffit pour déterminer complétement la forme d'une courbe enveloppe d'une courbe donnée, et notamment les formes les plus simples qui conviennent le mieux dans la pratique, et sont préférables à toutes les autres solutions théoriques de la question. Nous pouvons donc diviser toutes ces solutions en cinq classes :

1° L'enveloppée est un point, l'enveloppe est une épicycloïde (art. 134).

2° L'enveloppée est un rayon du cercle mobile, l'enveloppe est une épicycloïde (art. 137).

3° L'enveloppée est une développante, l'enveloppe est une développante (art. 139).

4° L'enveloppée est une épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant *intérieurement* sur l'une des circonférences primitives ; l'enveloppe sera une autre épicycloïde engendrée par la même circonférence roulant *extérieurement* sur l'autre circonférence primitive (art. 138).

5° Enfin, plus généralement encore, on peut dire, dans des termes qui renferment tous les cas précédents comme cas particuliers, que l'enveloppée étant la ligne décrite par un point d'une courbe quelconque roulant extérieurement sur l'une des circonférences primitives, l'enveloppe est engendrée par le même point dans le roulement de la courbe à l'intérieur de l'autre circonférence primitive.

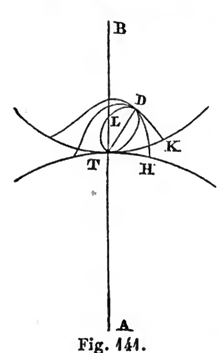


Fig. 141.

Cela résulte des théorèmes que nous avons déjà démontrés, car pour un point D quelconque (fig. 141) nous avons vu que, dans tout roulement, la normale

commune passe au point de contact T, donc DT sera une normale commune aux deux enveloppes de D, donc celles-ci ayant successivement leurs normales communes, seront l'une à l'autre enveloppe et enveloppée (1).

(1) Cette solution générale peut être ainsi présentée sous forme de théorème : *Il est toujours possible de trouver une courbe* PQR *qui en roulant sur une autre courbe donnée* ADFB *engendrera par quelque point une courbe* ACE, *pourvu que les normales* CD, EF *à cette dernière courbe rencontrent la première* ADFB.

En effet (fig. 142 et 143), soient CD, EF des normales aux points C, E infi-

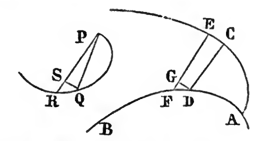


Fig. 142. Fig. 143.

niment voisins; par un point P menez $PQ = CD$, $PR = EF$, prenez $QR = FD$ et continuez ainsi de proche en proche, vous formerez une courbe qui en roulant sur AB décrira nécessairement la courbe ACE avec le point P. Car si Q est mis en coïncidence avec D, PQ avec CD, R coïncidera avec F... et ainsi des autres points. En effet on a : $QR = FD$; et aussi $DC = QP$, $EF = PR$, etc.,

$$\text{enfin angle } GFD = SRQ,$$

car $\frac{FG}{FD}$ et $\frac{RS}{RQ}$ sont les cosinus de ces angles, et ces fractions sont égales, puisque leurs dénominateurs sont égaux et que leurs numérateurs sont chacun la différence de deux lignes égales, DG étant perpendiculaire sur EF et par suite parallèle à EC.

La formation de la courbe PQR est donc toujours possible avec la condition précitée; c'est ainsi, par exemple, que l'on trouverait que la courbe qui, roulant sur une droite AB engendrerait une autre droite AP, par un point Q serait une spirale logarithmique QR dont P serait le pôle (fig. 144); ce qui se voit facile-

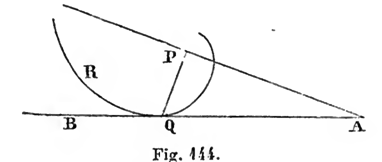


Fig. 144.

ment, puisque cette courbe jouit de cette propriété que le rayon vecteur fait un angle constant avec la tangente, condition satisfaite dans cet exemple.

DES ENGRENAGES PLANS (GÉNÉRALITÉS).

141. Revenons maintenant aux engrenages, et appliquons les résultats des considérations géométriques qui précèdent à la détermination des formes des dents.

Nous avons vu comment on traçait les cercles primitifs, en divisant la distance des deux centres en raison inverse des vitesses de telle sorte que $R\omega = R'\omega'$; comment le mouvement doit être produit, de manière que les longueurs égales des deux circonférences passent au point de contact, ce qui revient à dire qu'*un point quelconque sur l'un ou l'autre des cercles primitifs doit parcourir dans un même temps des arcs égaux*; que des points des deux circonférences doivent avoir à chaque instant des vitesses absolues égales.

142. *Transmission du mouvement circulaire par deux roues dentées.* Nous avons déjà dit que si nous considérons les deux cercles primitifs comme les contours de deux roues d'épaisseurs égales, comme les bases parallèles de deux tranches cylindriques qui se toucheraient suivant une arête, il faudra armer ces deux roues de saillies qui fassent corps avec elles, qui soient comme elles terminées par des surfaces cylindriques ayant pour arêtes des droites parallèles aux axes de rotation, pour profils sur les faces qui agissent l'une sur l'autre des courbes déterminées comme nous venons de le voir. Ce sont ces saillies qui transmettront l'effort moteur d'un axe à l'autre et qui portent le nom de *dents.* Le système de deux roues dentées constitue un engrenage.

Il ne suffit pas pour tracer un engrenage de déterminer les profils d'une couple de dents opposées, de manière à ce que la condition générale, le rapport constant des vitesses angulaires se trouve satisfait. Ces dents, en effet, ne peuvent avoir qu'un développement limité; elles ne seront en prise que pendant une certaine partie de la révolution entière; il faudra donc qu'à l'instant où elles se sépareront, deux autres saillies semblables aux premières viennent entretenir sans à-coups et d'une manière uniforme la rotation commencée. Ce qui revient à dire, qu'il faut en réalité que deux dents au moins puissent être en contact en même temps.

143. La question à résoudre est donc celle-ci :

Quels doivent être, pour un rapport de vitesses angulaires donné, le nombre, l'espacement, les profils, les dimensions des dents sur chacune des deux roues qui composent un engrenage.

Définissons d'abord les éléments de la question. Une dent a pour *base* l'arc de circonférence primitive qu'elle intercepte. Sur la circonférence primitive A (fig. 145), les arcs tels que eg, etc., seront

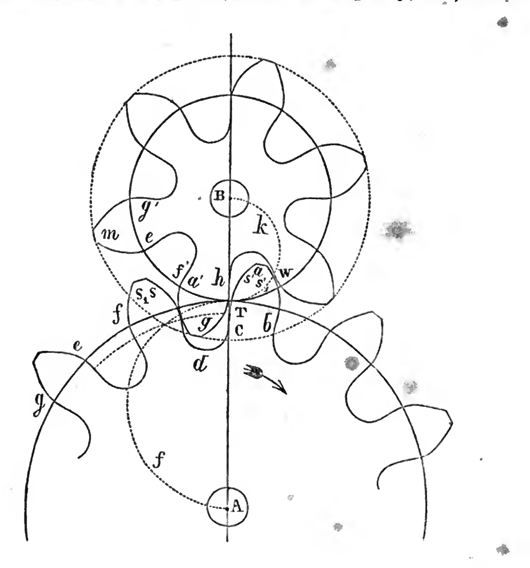


Fig. 145.

les bases des dents. On les nomme aussi le *plein* de la roue, en même temps qu'on désigne par cette expression le *vide* de la roue les arcs intermédiaires, les intervalles tels que ef; la somme d'une base et d'un intervalle, l'arc gf par exemple, forme une division entière; sur une même circonférence toutes les divisions sont égales comme toutes les dents pareilles. Chaque dent est terminée par deux profils égaux et symétriques, si l'engrenage que j'appellerai alors symétrique doit fonctionner dans les deux sens; peuvent être dissembla-

bles, si le mouvement doit toujours avoir lieu dans une seule et même direction; dans ce cas, les profils des faces qui n'ont pas d'action à produire sont arbitraires, à la seule condition de laisser aux dents une saillie et une résistance convenables, sans gêner le mouvement des dents de la roue opposée.

144. *Courbe de raccord.* Les profils en regard de deux dents consécutives se raccordent, en général, à l'intérieur de la circonférence primitive par une ligne courbe ou brisée que les dents de la roue opposée ne doivent jamais atteindre.

Dents échanfrinées. Lorsque les profils des deux côtés de la dent se coupent sous un angle aigu, lorsque l'extrémité des dents présente ainsi une arête tranchante, cette arête doit toujours dans l'exécution être adoucie. On fait plus, on abat ordinairement les extrémités trop faibles pour résister à de fortes pressions; les dents sont alors *échanfrinées.* La troncature se raccorde quelquefois par des arcs de cercle : dans aucun cas elle ne doit être terminée par des arêtes vives.

145. *Égalité des divisions sur deux roues qui engrènent.* Déterminons maintenant dans un engrenage donné les éléments qui viennent d'être définis. Soient sur les circonférences primitives des deux roues qui engrènent p, p', p'', etc., les divisions toutes égales entre elles de la première; q, q', q'', etc., les divisions pareillement égales de la seconde. Pour que les mouvements angulaires conservent entre eux un rapport invariable, les arcs des deux circonférences, qui traversent simultanément la ligne des centres doivent, ainsi qu'on l'a vu, être égaux en longueur. Or, considérons une première couple de dents telles que a, a' en prise sur la ligne des centres, par conséquent au contact de deux circonférences primitives et à l'origine de deux divisions correspondantes. Lorsqu'une seconde couple de dents a_1, a'_1 sera venue remplacer la première, les divisions entières p, q auront traversé la ligne des centres; ces divisions, et par suite toutes les autres, sont donc égales, *la longueur absolue des divisions doit donc être la même sur deux roues qui engrènent.*

146. *Rapport du nombre des dents sur les deux roues.* Il suit de là que les nombres de divisions ou de dents *sont pour chaque*

circonférence en raison inverse des vitesses angulaires données, ou du nombre de tours entiers que chaque roue doit faire dans un temps donné. En effet, en appelant, comme précédemment, R, R′ les rayons primitifs, ω, ω' les vitesses angulaires, et en désignant de plus par n et n' les nombres de divisions ou de dents, chaque division de la circonférence O a pour longueur $\frac{2\pi R}{n}$, chaque division de la circonférence O′, $\frac{2\pi R'}{n'}$; ces deux quantités doivent être égales, comme on vient de le voir. Ainsi $\frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}$ ou $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}$ d'après la condition générale des engrenages. Les plus petits nombres entiers qui expriment le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, car n et n' sont nécessairement entiers, sont donc les plus petits nombre de dents par lesquels ce rapport de vitesse puisse être obtenu.

Si d est la distance des axes et μ le rapport $\frac{n}{n'}$ du nombre de dents, on a :

$$R + R' = d,\ \frac{R}{R'} = \mu,\ \text{d'où } R = \frac{\mu d}{\mu + 1} \text{ et } R' = \frac{d}{\mu + 1}.$$

147. *Limites des bases des dents.* Que l'engrenage soit ou ne soit pas symétrique, la plus grande base que les dents d'une roue puissent avoir, mesurée sur la circonférence primitive, est l'intervalle des dents sur la roue opposée. Il est clair qu'alors la partie postérieure de la dent d'une roue et l'extrémité d'une division de l'autre roue arriveraient en même temps à la ligne des centres ; ces points passeraient en même temps par le point de contact des circonférences primitives. Or, une dent ne peut empiéter sur une dent de l'autre roue : chaque intervalle devra donc être plus grand que la base opposée (dans la pratique) ; l'égalité que nous supposons ne peut être qu'une limite.

Soient B, B′, les bases, I, I′, les intervalles sur les deux roues ; sur chacune d'elles, la somme d'une base et d'un intervalle forme une division entière, on a donc :

$$B + I = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'} = B' + I'.$$

De là on peut tirer la valeur de $I - B'$, des différences égales et nécessairement positives (nulles à la limite, comme on vient de le voir) qui constituent le *jeu* de l'engrenage. Soit J cette différence, ce jeu, et l'on aura : $J = \frac{2\pi R}{n} - (B + B') = \frac{2\pi R'}{n'} - (B + B')$ = *la longueur commune des divisions, moins la somme des bases.* Ordinairement on indique seulement le rapport de l'amplitude du jeu à l'amplitude des divisions. Ce rapport dans la pratique est compris entre $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{16}$.

148. *Détermination des profils par lesquels se fait la poussée.* Si l'on se reporte aux considérations géométriques exposées précédemment, la relation des profils opposés de deux dents en prise deviendra évidente. Pour que la condition générale des engrenages soit remplie, pour que tous les points des circonférences primitives parcourent constamment des arcs égaux, il faudra, si le profil de l'une des dents est donné, considérer cette courbe comme une enveloppée dont le profil de l'autre dent sera l'enveloppe dans le roulement d'une des circonférences primitives sur l'autre supposée immobile.

Lorsque l'engrenage devra être symétrique, les profils des deux côtés des dents des deux roues symétriques eux-mêmes, seront l'un par rapport à l'autre sur chaque roue enveloppée et enveloppe; en sorte que si le jeu de l'engrenage était nul, si la base des dents d'une roue était à la limite égale à l'intervalle des dents de l'autre roue, le contact aurait lieu en même temps des deux côtés de la dent. Ce mouvement, que les moindres irrégularités arrêteraient dans la pratique, n'est ici qu'une limite, qu'une abstration de la théorie.

En réalité, la base d'une dent, comme on l'a vu, sera toujours plus petite que l'intervalle entre deux dents de l'autre roue, en sorte que les profils des dents ne se toucheront que d'un côté; mais leur écartement ou le jeu devra toujours être très petit, car il faut n'enlever que le moins possible à l'épaisseur, par suite à la résistance des dents. On doit encore ajouter que dans plusieurs cas, les roues tout en continuant de marcher dans le même sens, par de simples variations dans leur vitesse, se trouveront alternativement menantes et menées. Or, il importe de diminuer autant que pos-

sible les chocs qui résultent de ces rencontres. C'est à quoi l'on parvient, en ne laissant au jeu que ce qu'il faut pour les imperfections de l'exécution pratique.

149. *Limite intérieure de l'entaille qui sépare deux dents sur une même roue.* Une dent, lorsqu'elle se termine par une pointe telle que t (fig. 146), ne doit jamais pousser par cette pointe; de plus

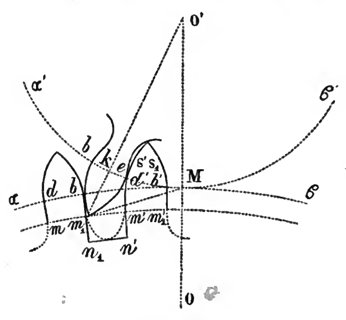


Fig. 146.

il faut que, pendant la poussée qui se fait par les faces de la dent, la pointe ne rencontre pas d'obstacle, que son passage soit constamment libre. L'entaille pratiquée dans la roue O, par exemple, au delà du point m_1, pour recevoir la dent bte, aura donc pour limite le lieu de toutes les positions relatives qu'à chaque position du contact le long des faces s ou s_1 de l'autre roue, la pointe t viendra prendre. Or, on obtiendra toutes les positions relatives des profils s_1, bt pendant leur mouvement, toutes les positions de leur contact, en faisant rouler $\alpha' 6'$ sur $\alpha 6$. Dans ce roulement, la pointe t, considérée comme un point extérieur lié au cercle O', décrira une portion d'épicycloïde allongée dont nous avons donné le tracé. Cette courbe est donc la limite de l'espace nécessaire.

Cette courbe se raccorde au point m_1 avec le profil s_1. En effet, au point m_1, lorsque le contact a lieu entre ce profil et l'extrémité de bt, tM est la normale commune à l'enveloppée bt et à l'enveloppe s_1. Mais en considérant le point extrême t comme décrivant l'épicycloïde allongée dans le roulement de $\alpha' 6'$, tM est encore la

normale à cette dernière courbe en m_1. Les courbes s_1 et $m_1 m'$ ont donc en m_1 une normale et par conséquent une tangente commune.

Lorsqu'on a déterminé la limite intérieure d'un premier profil s_1, tous les profils homologues, tournés dans le même sens, se termineront sur une circonférence passant par m_1 et concentrique avec $\alpha\beta$. Si l'engrenage est symétrique, la même circonférence sera également la limite intérieure des profils de l'autre côté des dents.

Si l'on considère comme une seule courbe le contour continu $m_1 m' d'$, qui termine l'espace compris entre deux dents de la circonférence O (à la limite où le jeu étant nul, la base be est égale à l'intervalle bd'), on peut dire que ce contour entier est l'enveloppe du contour entier de la dent opposée bte, la portion mm' étant considérée comme enveloppe du seul point t; avec une interprétation semblable, la même chose sera vraie si la dent bte échanfrinée par exemple, offre des lignes brisées. Cela sera vrai encore lorsque les profils inverses bt, te ne seront pas symétriques, et la portion d'enveloppe correspondant à la portion d'enveloppée te, par exemple, sera dans l'engrenage non symétrique lui-même, la limite extérieure des profils s', du reste alors arbitraires.

Il est inutile d'ajouter que le développement s_1 de la partie saillante des dents de la roue O déterminera la limite des entailles ou creux de la roue O', comme les saillies bt de la roue O' viennent de limiter les profils et les creux de la roue O.

150. *Comment sont terminés dans une roue pleine les entailles et les creux.* Les limites que nous venons de déterminer ne doivent jamais être atteintes; les entailles doivent toujours pénétrer plus avant dans une roue pleine, dépasser l'épicycloïde allongée $m_1 t m'$ pour que l'engrenage puisse marcher sans danger.

Dans la pratique, afin de ne pas ajouter sans utilité réelle aux difficultés d'exécution, il suffira le plus souvent de prolonger l'entaille en ligne droite, suivant la direction des rayons allant des points m, m' au centre de la roue, jusqu'à une distance de la circonférence $\alpha\beta$ un peu plus grande que la saillie maximum kt des dents de l'autre roue. Une ligne droite ou un arc de cercle concentrique avec $\alpha\beta$ complète le contour de raccordement $m_1 n_1 n' m'$.

Lorsqu'il résulte de cette disposition une arête même très obtuse en m, ou en m', elle devra toujours être adoucie, sauf à ce que les dents ne puissent se trouver en prise qu'un peu plus près de la circonférence extérieure.

DÉTAILS SPÉCIAUX SUR LES DIFFÉRENTS ENGRENAGES CYLINDRIQUES.

Différentes courbes, qui correspondent aux cas les plus simples exposés dans les considérations qui précèdent, sont adoptées dans la pratique comme profils de dents. Elles constituent autant d'engrenages dont il faut indiquer le nom et l'ajustement.

151. *Engrenages à lanterne* (fig. 147). Les dents de la roue B sont des cylindres à bases circulaires, ayant leurs centres sur la circon-

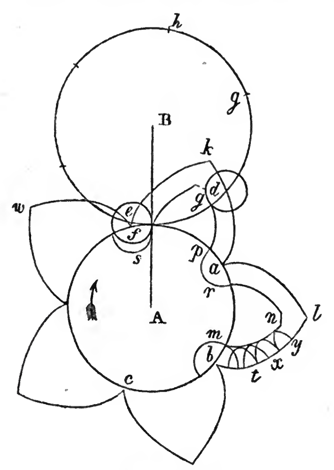


Fig. 147.

férence primitive; les profils enveloppes des dents opposées sont, comme on l'a vu, les courbes qu'on obtient en retranchant le rayon des cercles des bases de toutes les normales aux épicycloïdes engen-

drées par leurs centres dans le roulement du cercle primitif B sur A. Chacune des entailles est terminée, soit par deux faces planes, soit par un arc de cercle dont le centre est sur la circonférence primitive, et le rayon au moins égal à celui des cercles de base des cylindres qui forment les dents d'une des roues. La poussée ne commence pour chaque dent que sur la ligne des centres, ou au moins extrêmement près de cette ligne, par le point correspondant à la rencontre de la courbe des dents et de la circonférence primitive (art. 136).

Cet engrenage porte le nom d'engrenage à lanterne; les petits cylindres ou fuseaux s'ajustent entre deux plateaux ou tourteaux circulaires, et l'intérieur de cette espèce de tambour reste vide. Les dents de la roue pleine s'engagent entre les tourteaux; elles sont ordinairement implantées dans le corps de la roue, et s'appellent *alluchons*. Les fuseaux, s'usant plus vite que les alluchons par le frottement, s'exécutent plutôt en fonte, les dents plutôt en bois. On a aussi proposé de rendre les fuseaux mobiles autour de leur axe pour diminuer les frottements, mais cet ajustement manque de solidité et les fuseaux cessent bientôt de tourner.

L'engrenage à lanterne est peu employé aujourd'hui, et seulement pour des mouvements qui n'exigent pas une grande précision.

152. *Engrenages à flancs* (fig. 148). L'engrenage à flancs a plus de douceur et de régularité. Dans celui-ci, les enveloppées, les profils que l'on se donne sont des rayons de l'une des circonférences primitives, de $\alpha' \beta'$ par exemple; les profils enveloppes, dont l'autre roue doit être armée pour conduire ces rayons, sont donc des épicycloïdes Mz engendrées par le roulement sur la circonférence $\alpha\beta$, d'un cercle V dont le diamètre O′M est le rayon de $\alpha'\beta'$. Les plans diamétraux Me portent le nom de *flancs* : ils se terminent à la circonférence primitive dans laquelle ils sont entaillés, car l'épicycloïde qui les mène les touche

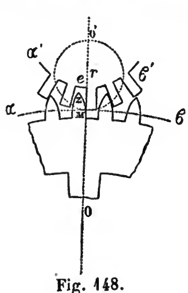


Fig. 148.

en M au contact des circonférences et sur la ligne des centres par son point de rebroussement. On voit en même temps qu'elle ne peut jamais les conduire avant cette ligne. Quant aux limites intérieures de l'entaille comprise entre deux flancs, les règles générales s'appliquent sans difficulté. Ce sont ici les flancs eux-mêmes que l'on prolonge pour donner passage à la dent engagée; mais la partie de ces flancs, qui peut seule se trouver en prise, devra dans un engrenage délicat être la plus exactement dressée; la limite intérieure de cette partie se trouvera sur un cercle concentrique à O′ et dont le rayon est déterminé par le point d'intersection de la circonférence décrivante, avec la circonférence qui contient tous les sommets z des dents épicycloïdales.

153. *Engrenages à flancs réciproques.* A proprement parler, dans un simple engrenage à flancs, semblable à celui que nous venons de décrire, l'une des roues n'offre aucune saillie au-dehors de sa circonférence primitive; l'autre roue, à la limite du moins, aucun vide intérieur au contour de la sienne. Telle n'est pas là la disposition employée dans la pratique; le plus souvent les deux roues sont garnies à la fois de saillies et d'entailles, ce qui donne le système déjà représenté fig. 145. Les épicycloïdes Mz sont prolongés au delà de leur origine M par des flancs formant ainsi avec elles un profil continu, et réciproquement les flancs eM se raccordent avec des épicycloïdes, enveloppes des rayons de la circonférence $\alpha\beta$. Deux roues semblables peuvent indifféremment se mener l'une l'autre.

La plus petite des deux roues s'appelle *pignon*, elle est en général menée par la plus grande.

154. *Engrenages intérieurs à flancs à la roue intérieure.* L'engrenage à flancs est quelquefois intérieur. C'est le nom qu'on lui donne lorsqu'un des centres O′, par exemple, et la circonférence $\alpha'\beta'$ sont intérieurs à la circonférence $\alpha\beta$. Si la roue extérieure doit seule être armée de dents et la roue intérieure porter seule des flancs, comme figure 149, cet engrenage ne donne lieu à aucune remarque nouvelle. Les profils de la roue extérieure sont des épicycloïdes engendrées par un cercle mobile dont le rayon est moitié du rayon du cercle O′, et qui roule intérieurement sur $\alpha\beta$. Les dents doi-

vent conduire ; elles ne peuvent le faire qu'après la ligne des centres.

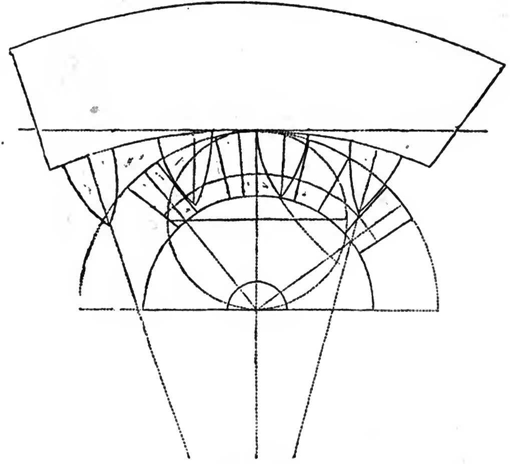


Fig. 149.

155. *Engrenages à flancs à la roue extérieure.* Mais si au contraire, dans le même engrenage, on voulait armer de dents Mt la

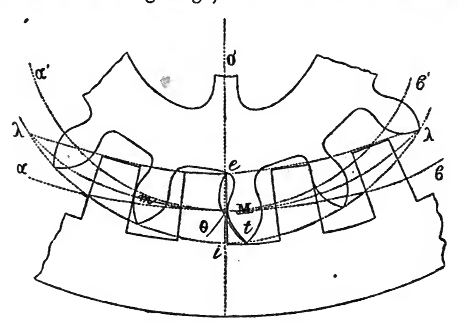


Fig. 150.

roue intérieure O′ (fig. 150), et donner seulement des flancs à la

roue extérieure $\alpha\beta$, les profils Mt seraient, comme en général, les épicycloïdes engendrées par le roulement sur $\alpha'\beta'$ d'un cercle mobile dont le rayon serait moitié du rayon de $\alpha\beta$; mais alors les flancs Mie de $\alpha\beta$ devraient être entaillés d'une part jusqu'en i, pour donner passage aux dents; de l'autre, et c'est ici le point important, il faudrait les prolonger en saillie intérieure par rapport à la circonférence primitive $\alpha\beta$, depuis M jusqu'en e, ce prolongement Me pouvant seul recevoir les contacts des profils Mt.

En effet, pour trouver le point des flancs iMe, où le sommet des dents viendra les toucher, on décrira comme en général, de O′ comme centre, la portion de la circonférence $\lambda t\lambda$ passant par les sommets t, jusqu'à sa rencontre en $\lambda\lambda$, avec la circonférence ayant un diamètre égal au rayon $\alpha\beta$. En effet, comme une semblable circonférence également tangente en M à $\alpha'\beta'$ décrit les profils Mt, les divers points de Mt la rencontreront dans des positions qui correspondront à celles qu'occupe le point M sur la circonférence décrivante pour un même roulement. La première décrit d'ailleurs les flancs iMe, elle renfermera donc tous les points de contact des dents avec les flancs; la circonférence $\lambda e\lambda$ concentrique avec $\alpha\beta$ contiendra donc les limites cherchées des flancs, des contacts extrêmes des sommets t. La longueur des dents, et par suite celle ie des flancs, sera d'autant plus grande que l'on voudra qu'un plus grand nombre de dents soient en contact. Il est clair qu'il n'y aurait de contact qu'en M, par une seule dent à la fois, si les flancs n'étaient pas prolongés à l'intérieur.

Il ne suffit pas ici d'avoir déterminé l'étendue convenable des flancs Me formant saillie, il faut encore s'assurer que ces flancs, dans toutes les positions relatives où le jeu de l'engrenage les amènera, pourront se loger sans obstacle entre les dents Mt de O′. Cela revient à dire, en considérant les flancs Me comme de véritables dents, que l'entaille dans la roue entre ses dents Mt devra avoir pour limite l'enveloppe de toutes les positions du point e dans le roulement de la circonférence primitive $\alpha\beta$ elle-même sur l'autre circonférence primitive $\alpha'\beta'$. Cette enveloppe est l'épicycloïde allongée θet qui se raccorde nécessairement en t avec le profil épicycloïdal de la dent M t, puisque ces deux points viennent en contact

par le roulement. Cette dent Mt devrait donc à l'intérieur être évidée suivant la courbe $e\theta$. Au point voisin de M où les deux courbes se coupent, l'arête devrait être adoucie. Une portion vers M du profil Mt se trouvant ainsi supprimée, la dent Mt ne pourrait agir qu'à une petite distance après la ligne des centres. Mais, ce qui est plus important, cette dent peut se trouver tellement affaiblie à la partie inférieure vers e, que la disposition et l'engrenage dont on vient de parler doivent être exclus de la pratique.

156. *Impossibilité de rendre l'engrenage intérieur réciproque.* Quant à donner à la fois à chaque roue, comme dans l'engrenage extérieur, des dents épicycloïdales et des flancs, on en reconnaît ici l'impossibilité. En effet, en considérant la dernière figure, on voit que le flanc Me de la roue O′ devrait être creusé pour faire place à l'épicycloïde raccourcie θe, ou que le flanc ie de la roue O, si l'on voulait que O′ portât un flanc, devrait disparaître pour laisser à découvert le profil θe, et ne pourrait par suite avoir la forme d'une dent. Ce n'est qu'en multipliant le nombre des dents et en augmentant le jeu qu'on exécute des engrenages intérieurs par les mêmes principes que les engrenages extérieurs, sans inconvénient dans la pratique.

157. *Engrenages épicycloïdaux.* Les dents tracées dans le système que nous venons d'expliquer sont celles que la pratique a très généralement adoptées; leur emploi offre cependant un inconvénient très grave; le cercle décrivant de l'arc épicycloïdal des dents devant avoir pour diamètre le rayon du cercle primitif de la roue avec laquelle ces dents engrènent, il en résulte qu'une roue d'un pas et d'un nombre de dents donnés, 40, par exemple, tracée pour marcher convenablement avec une autre roue de 50 dents, engrènera fort mal avec une autre roue d'un tout autre nombre de dents, tel que 100. Il est évident, en effet, que le diamètre du cercle décrivant étant 1 dans le premier cas, devrait être double dans le second, et engendrer par suite des arcs épicycloïdaux différents des premiers. Cette objection intéresse au plus haut degré la pratique moderne qui fait un emploi constant d'engrenages métalliques. Elle oblige, en effet, le fondeur à exécuter pour un pas donné autant de modèles différents qu'il veut faire engréner de

roues différentes avec une seule et même roue; ce qui exige un nombre presque indéfini de modèles.

En outre, dans une foule de combinaisons mécaniques, il arrive qu'une roue principale doit conduire à la fois et directement deux, trois, quatre roues de différents diamètres.

L'emploi des engrenages en fonte exige donc un tracé des dents tel que deux roues quelconques d'un pas déterminé engrènent convenablement.

Pour satisfaire à cette condition, il suffit de choisir, pour tout un système de roues de même pas, un *cercle décrivant* convenable mais *constant*, de le faire rouler extérieurement sur chacune des circonférences primitives pour décrire les parties des dents extérieures à ces circonférences, puis de le faire rouler intérieurement à chacune d'elles pour lui faire décrire les épicycloïdes internes qui forment les dents intérieures à ces circonférences primitives.

La fig. 151 montre l'application de ce principe.

A et B sont les centres de rotation, T*d*D = T*g*G est le cercle décrivant, constant, qui en roulant, savoir : extérieurement sur F*f* a décrit les faces *rq*; intérieurement à F*f* les flancs *rs*; de même relativement à E*e*, les faces *mn*, les flancs *mp*.

Ainsi qu'on l'a vu, les courbes décrites par le roulement d'un même cercle sur les deux circonférences, extérieurement sur l'une, intérieurement sur l'autre, seront enveloppes et enveloppées; le contact aura donc toujours lieu sur ce cercle. Une partie du cercle générateur G*g*T sera le lieu de contact avant la ligne des centres; une partie du cercle égal T*d*D sera le lieu de contact après le passage de cette ligne. Ce contact s'éloignera de plus en plus du centre de rotation de la roue qui mène, en se rapprochant du centre de la roue conduite. Il commencera avant la ligne des centres entre la pointe *n* de la roue conduite et la racine *s* de la dent qui la conduit, remontera de *n* vers *m* sur la première et descendra de *s* vers *r* sur la seconde, jusqu'au passage de la ligne des centres sur laquelle le contact aura lieu entre les points *r* et *m*. Il s'avancera, après le passage de cette ligne de *r* vers *q* et de *m* vers *p* pour cesser à la *pointe* de la dent qui mène, et à la racine de la dent menée, de telle sorte que le contact a lieu avant la ligne des centres

au-dedans de la circonférence primitive de la roue qui mène, et au-dedans de la circonférence primitive de la roue menée, après le passage de cette ligne. Chacune des roues peut d'ailleurs indifféremment conduire ou être conduite.

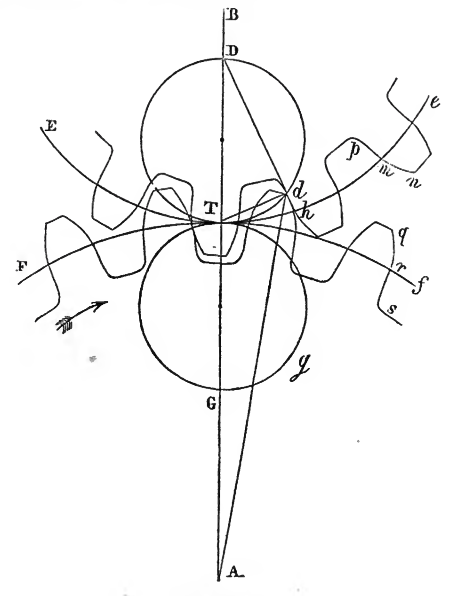


Fig. 151.

Diamètre du cercle décrivant. En aucun cas le diamètre du cercle décrivant ne doit être *plus grand* que le rayon primitif de l'une quelconque des roues du système. S'il en était autrement, les dents auraient à la racine une épaisseur beaucoup moindre que sur la circonférence primitive, défaut évident que partagent, quoiqu'à un degré moindre, les engrenages à flancs. Lorsque, au contraire, le diamètre du cercle décrivant est plus petit que le rayon du cercle primitif, les dents s'épanouissent vers la base et acquièrent ainsi une forme qui favorise leur résistance à la rupture; il

ne faudrait pas toutefois réduire ce diamètre à l'excès, car alors les faces épicycloïdales prenant trop de courbure, les dents deviendraient trop courtes; il semble que la meilleure règle à suivre consiste à prendre pour diamètre du cercle décrivant le rayon de la plus petite de toutes les roues du système.

158. *Engrenages à développantes à cercle.* Si par le point de contact T des circonférences primitives (fig. 152), on mène une

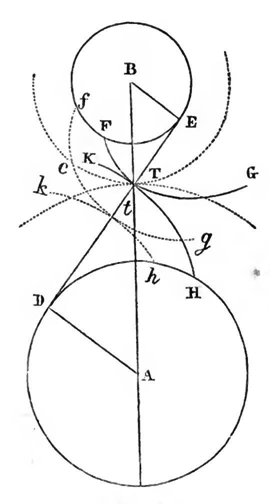


Fig. 152.

droite DTE, les cercles intérieurs AD, BE tangents à cette droite, concentriques aux circonférences primitives, auront des rayons proportionnels aux rayons des deux circonférences. Les développantes HK du cercle AD et FG du cercle BE seront l'une à l'autre enveloppe et enveloppée, comme nous l'avons vu. Elles pourront donc former les profils conjugués de deux dents d'un système d'engrenages.

Les contacts se trouvent constamment sur la droite DE; la deuxième tangente menée aux deux cercles par le point T serait de même le lieu des contacts des autres faces des dents.

Les dents terminées de part et d'autre par des développantes symétriques pourront être échanfrinées; leur longueur totale sera obtenue en les traçant dans la position extrême où elles doivent agir avant et après la ligne des centres, et en les coupant à cette distance par des arcs de cercle concentriques aux roues. La saillie des dents étant déterminée, pour leur donner passage on prolonge, si cela est nécessaire, les développantes, à partir de leur origine par deux rayons tangents à leur origine et dirigés vers les centres, et on termine le fond de chaque entaille par un arc de cercle.

159. *Engrenages intérieurs à développantes* (fig. 153). L'engre-

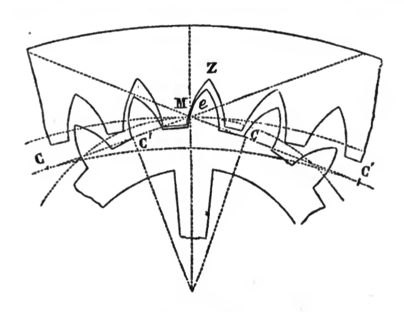


Fig. 153.

nage à développantes peut être intérieur, la circonférence O' se trouver comprise dans la circonférence O. Les dents de celle-ci doivent être tracées comme celles que porterait d'après la construction précédente une circonférence extérieure; le profil de ces dents serait le même mais leur courbure serait de sens contraire. C'est ce qui se reconnaît encore, d'après la construction générale des enveloppes, pour les rayons de courbure des développantes M*z* et M*e* : ce qui veut dire que ces courbes, comme les circonférences primitives, ont leur courbure tournée dans le même sens; inconvénient très grave dans la pratique; aussi ces engrenages intérieurs n'ont guère d'applications. Celui-ci, comme on le voit, est réciproque. Quelle que soit la roue menante, il peut, si le nombre

des divisions est suffisant, avoir constamment deux dents en prise après la ligne des centres.

Remarquons que les engrenages à développantes ont, relativement aux engrenages épicycloïdaux, l'inconvénient de se conduire par des contacts plus obliques relativement à la ligne des centres; néanmoins quelques avantages spéciaux à ce genre d'engrenages nous engagent à entrer à leur égard dans quelques développements.

160. Cherchons comment la pression varie au contact des dents dans un engrenage quelconque.

Soit N la pression qui s'exerce au point de contact entre les deux dents ab, $a'b'$, et s'exerce suivant la normale commune, soit P la force qui agit à la circonférence de la roue O, on aura, le mouvement étant uniforme :

PR = NR sin. α, α étant l'angle de la normale et de la ligne des centres, et R sin. α = Op', la perpendiculaire abaissée sur la normale Ap, suivant laquelle la pression a lieu, d'où P = N sin. α.

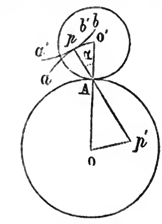


Fig. 154.

161. Pour tous les engrenages, sauf pour celui à développantes, l'angle de la normale et de la ligne des centres étant variable, la pression est donc constamment variable. La valeur de la pression, abstraction faite du frottement, est au contraire constante dans les engrenages à développantes, ce qui est un avantage dont toutefois il ne faut pas s'exagérer l'importance, car il n'en résulte pas une usure tout à fait régulière des dents. Pour cela, en effet, il faudrait que le travail du frottement fût constant, et par suite aussi le chemin parcouru par le frottement; il faudrait donc que la différence des arcs passant dans un même temps au point de contact, ou pour de très petits arcs ω, ω', que la différence des rayons de courbure fût constante, ce qui n'est pas. La variation en est d'autant moindre que le contact sur chaque dent, qui a toujours lieu suivant la tangente commune, est moins prolongé, ce qui a lieu en rendant le nombre des dents un maximum. Le travail du frottement variant,

il en résulte que, dans la réalité, l'usure n'est pas la même pour tous les points de la dent.

Dans les engrenages à développantes, la forme des dents de chaque roue étant déterminée par le roulement d'une droite sur une même roue, ne change pas quand le rayon d'un des cercles varie, avantage que possède seul le dernier système que nous venons de décrire et que ne possèdent pas les engrenages à flancs, pour lesquels les formes d'une dent sont déterminées par le roulement d'une circonférence dont le rayon est moitié de celui de l'autre cercle primitif.

Enfin, un dernier avantage des engrenages à développantes et qu'ils possèdent seuls, est que si les axes des roues éprouvent un certain déplacement en restant parallèles, l'engrenage ne cesse pas d'être exact, la poussée devant toujours avoir lieu par les mêmes courbes dans tous les cas.

On doit incliner très peu la tangente commune aux deux roues concentriques aux circonférences primitives, les bras de levier de la puissance et de la résistance seront les plus grands possibles, ce qui est avantageux puisque, pour la transmission d'une même quantité de travail, la pression diminuant, son action destructive sur chaque dent diminuera également.

162. Tous les éléments du tracé d'un engrenage quelconque sont actuellement déterminés, sauf un, celui du nombre de dents, ou plutôt les limites dans lesquelles les nombres $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'}$ doivent se trouver renfermés pour que l'engrenage satisfasse aux conditions de continuité d'action que nous avons reconnu être nécessaires. Nous allons y parvenir par quelques considérations d'un ordre particulier.

DES ARCS-BOUTEMENTS. — NOMBRE ET SAILLIE DES DENTS.

163. La résistance passive qui s'exerce entre les dents d'un engrenage, avant et après la ligne des centres, n'est pas également nuisible. Avant la ligne des centres elle ne se borne pas au frottement, il peut en résulter une action destructive que les arêtes vives

de la pointe des dents peuvent exercer sur les surfaces qu'elles rencontrent obliquement.

Il peut arriver, soit à raison du petit nombre de dents, soit à raison de quelque irrégularité dans leur exécution, qu'à une certaine époque du mouvement les deux roues *o*, *o'* (fig. 155), n'aient qu'un seul point de contact en *m* précisément suivant le dernier élément du profil *m a*.

A partir de cette position, si la roue *o* tournant de droite à gauche est celle qui mène, la pointe *m* formant arête vive exercera seule la poussée en remontant vers l'extrémité *b* du profil *d b*, tandis que la poussée régulière devrait avoir lieu par le prolongement *m i* du profil *am* et de manière que le contact s'avançât vers *d*, le long du profil *b d*. On voit d'abord que le mouvement de la roue *o'* dans la poussée qui se fait par l'arête vive *m* se trouve ralenti. En effet, si la courbure des profils *a m i*, *b m d* a constamment le même

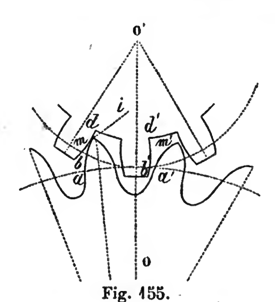


Fig. 155.

signe, toutes les tangentes à la portion *m i* par exemple, laissent derrière elles, par rapport au sens du mouvement, la portion de profil *a m*, la pointe *m* par conséquent. Le mouvement de *o'* est ainsi ralenti jusqu'à ce que la poussée se fasse régulièrement de la dent *a' m'* sur la dent *b' d'*. Toutefois, et dans cet intervalle, la poussée irrégulière par la pointe *m* n'a lieu qu'au delà de la ligne des centres, qu'après cette ligne par rapport au sens du mouvement.

Mais renversons le sens du mouvement. Regardons la roue *o'* comme roue menante et comme tournant de *b* vers *b'* dans le même intervalle de poussée irrégulière que nous venons de considérer,

après que le profil $b'd'$ aura cessé d'être en prise, la partie bm du profil bd mènera seule la pointe m en la forçant d'avancer de b vers m. Alors si l'on regarde comme uniforme le mouvement dirigeant de o', la rotation de o se trouvera cette fois accéléré et de plus la poussée irrégulière de bm sur le point m aura lieu tout entière avant la ligne des centres, par rapport au nouveau sens du mouvement. C'est alors que l'action de la pointe, ou pour mieux dire de l'arête vive m, peut surtout détruire la surface opposée, s'y enfoncer même au point d'arrêter le jeu de l'engrenage ou de briser les dents ainsi engagées; c'est là ce que l'on désigne par le nom d'arcs-boutements. En effet, la somme des lignes $om + o'm$ étant plus grande que oo', s'il arrive que quelque obstacle s'oppose à leur mouvement, il y aura nécessairement rupture lorsqu'elles se rapprocheront de la ligne des centres; le même effet ne serait pas produit au delà de la ligne des centres, la quantité $om + o'm$ allant toujours en croissant.

164. *De l'effet des arc-boutements.* Il est facile de se rendre compte de la différence d'action des pointes des dents avant et après la ligne des centres. Si la pointe est en prise après cette ligne, elle parcourt la surface opposée de m vers b; si elle est en prise avant la même ligne (toujours par rapport au mouvement), elle parcourt la surface qui la pousse de b vers m.



Fig. 156.

Or, l'arête vive m (fig. 156) peut être considérée comme le tranchant d'un ciseau symétrique par rapport au rayon de la roue o passant par le point m, et sur lequel on appuierait en cherchant en même temps à le faire glisser sur la surface amd. Si le glissement doit avoir lieu du côté où le rayon fait avec les éléments de la surface un angle aigu, cette surface sera seulement usée d'une manière rapide; si le glissement tend à se produire du côté de l'angle obtus, il sera le plus souvent impossible, ou du moins il y aura sans cesse pénétration et déchirement. On voit clairement ce qui se passe en se représentant la surface ab comme composée de particules isolées, entre lesquelles tend à s'engager le tranchant de m. Dans un sens, ces molécules peuvent être considérées comme

rencontrées par un plan incliné qui les surmonte; dans l'autre sens, poussées directement par un tranchant, elles devront être coupées.

165. *Des dispositions à prendre pour éviter les arc-boutements.* Puisque dans le cas de poussée irrégulière où il peut y avoir arc-boutement, le mouvement de la roue menée se trouverait accéléré, il ne saurait alors rester de dents régulièrement en prise, et réciproquement, en supposant l'engrenage rigoureusement exécuté, s'il y a des dents en prise par contact, il ne saurait y avoir d'arc-boutement. On les évitera plus sûrement encore en faisant en sorte que les dents ne puissent se rencontrer qu'après la ligne des centres; mais on voit alors que si les dents ont des profils symétriques, il n'y aura qu'une des deux roues qui puisse être roue menante. C'est le cas de l'engrenage à lanterne, de l'engrenage à flancs, où le pignon n'est point armé de dents; les fuseaux et les flancs ne devront jamais conduire la roue qui mène; celle-ci peut conduire dans un sens comme dans l'autre. J'appellerai les engrenages qui se trouvent dans ce cas, *symétriques sans réciprocité.*

Mais dans les machines à mouvement rapide, à résistance très

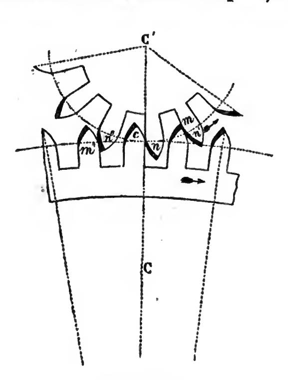


Fig. 157.

inégale, où les vitesses sont régularisées par l'emploi de volants, il arrivera fréquemment que, tout en marchant constamment dans

un seul et même sens, les deux roues seront alternativement, l'une par rapport à l'autre, menantes et menées. On voit d'abord ici qu'il importe de maintenir le jeu très petit pour diminuer autant que possible le choc des dents au moment où les roues changent de rôle; on voit ensuite que les deux roues devant pouvoir conduire l'une comme l'autre après la ligne des centres, elles auront nécessairement, *si leurs profils sont symétriques*, des dents *à la fois* en prise avant et après cette ligne, comme par exemple en m et en m'' (fig. 157), puisque, suivant le sens que l'on attribuera au mouvement de rotation, les contacts m et m'' seront tantôt l'un, tantôt l'autre, situés avant et après cette même ligne des centres CC'.

J'appelerai symétriques et réciproques les engrenages de cette sorte où les deux roues peuvent être menantes ou menées dans un sens comme dans l'autre.

Les engrenages à flancs ou à développantes, dont les deux roues ont des dents saillantes et symétriques, sont dans ce cas.

La moindre irrégularité dans l'exécution pouvant faire alors que la poussée n'ait lieu que par les dents situées en arrière de la ligne des centres, la perfection apportée à l'exécution des dents garantit seule qu'il n'y aura pas d'arc-boutement.

166. On peut, d'ailleurs, s'en garantir d'une manière absolue en conservant les avantages de la réciprocité, c'est-à-dire faire que les deux roues puissent être menantes et menées par des contacts uniquement situés après la ligne des centres; il suffit pour cela de détruire la symétrie des profils, d'amaigrir les dents de l'une et de l'autre roue, *seulement dans leur partie saillante et du côté opposé au sens du mouvement que l'on veut seul conserver*, il est évident que de part et d'autre on supprime ainsi les contacts situés en arrière de la ligne des centres.

Dans la figure précédente ce seraient donc les parties ombrées nn' de la roue C' et les parties également ombrées e, e' de la roue C qu'il faudrait supprimer, d'après le sens du mouvement qu'indiquent les flèches.

L'engrenage est alors réciproque et non symétrique; mais comme pour en déterminer les éléments on peut toujours partir du tracé

d'un engrenage à la fois symétrique et réciproque, ce cas rentre dans le précédent. On doit donc distinguer deux cas.

Le premier, celui des engrenages symétriques sans réciprocité. Pour celui-ci il faudra faire en sorte que la roue qui seule doit mener ait toujours des dents en prise après la ligne des centres.

Le second, celui des engrenages symétriques et réciproques. Il faudra dans ce cas qu'il y ait toujours des dents en prise avant et après la ligne des centres.

Nombres des dents.

167. Pour que la condition qu'il y ait plusieurs dents en prise soit satisfaite, il faut que le nombre de celles-ci soit supérieur à un certain nombre minimum pour chaque espèce de roues d'engrenage.

En effet, nous avons vu que les nombres de dents des roues étaient dans le rapport $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'}$, et qu'ainsi il faut prendre pour n et n' deux nombres entiers qui satisfassent à cette relation. Mais ce rapport ne détermine pas complétement les dents, car chaque division comprend un vide et un plein, et il faut encore savoir quelle épaisseur on devra donner au plein. Cette épaisseur n'est pas arbitraire, elle serait déterminée par la résistance des matériaux, d'après la grandeur de la force à mener, si la largeur de la roue était donnée. Dans le cas général où l'on peut faire varier la largeur de la roue et augmenter par suite le nombre de dents, il faut qu'il soit tel qu'au moment où deux dents actuellement en contact vont cesser de fonctionner, deux autres dents se trouvent en prise, afin qu'il n'y ait pas d'arrêt dans le mouvement de la roue menée. Cette condition pourrait n'être pas remplie, si l'on faisait arbitrairement le partage d'une division de la première roue entre le plein et le vide, partage d'où dépendent le vide et par suite le plein de la deuxième roue. Il pourrait arriver, par exemple, qu'une dent de la première roue ne conduisît pas assez loin la dent avec laquelle elle est en contact, c'est-à-dire qu'elle l'abandonnât avant qu'une autre dent de la première roue ne fût en prise avec une autre dent de la deuxième roue. Pour y remédier, il faudrait prolonger le profil de la dent; mais alors, puisqu'elle

est symétrique, il faudrait augmenter son épaisseur à la base. Le vide deviendrait donc d'une moindre étendue, et aussi les bases des dents de la deuxième roue ; elles pourraient donc alors être trop faibles, en supposant qu'il restât un vide, que la solution fût possible pour le nombre de dents considéré.

168. Elle est toujours possible si l'on augmente suffisamment le nombre des dents, c'est-à-dire les nombres n et n'. Ces nombres sont donc susceptibles d'un minimum qui ne doit jamais être atteint dans la pratique. Cette limite inférieure varie avec la nature de l'engrenage. La recherche de cette limite mène à des calculs assez compliqués dont M. Savary a déduit les résultats suivants :

Appelant μ le rapport $\frac{n}{n'} = \frac{R}{R'} = \mu$, moindre que l'unité, il a trouvé qu'on devait toujours avoir :

Dans l'engrenage à flancs $n' =$ ou $> 10\,(1 + \mu)$.

Dans l'engrenage à lanterne $n' =$ ou $> 7 + 4\,\mu$.

Dans l'engrenage à développantes $n' =$ ou $> 16 + 2\,\mu$.

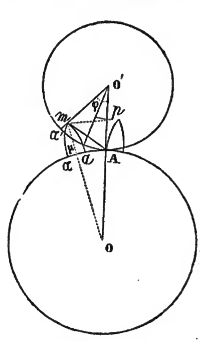


Fig. 158.

169. Nous donnerons comme modèle du genre de calculs propre à conduire aux résultats ci-dessus, celui du nombre minimum de dents de l'engrenage à flancs.

Soient (fig. 158) deux dents consécutives dont l'une commence à s'appuyer en A sur le flanc de la deuxième roue au moment où l'autre cesse d'être en prise avec le flanc voisin.

Le point A, où la première dent commence à toucher le flanc de la dent de l'autre roue, est situé sur la ligne des centres.

L'arc $A\alpha$ contient un plein et un vide; on a donc : $A\alpha = \frac{2\pi R}{n}$.

L'arc $A\alpha'$ contient aussi un plein et un vide; on a donc : $A\alpha' = \frac{2\pi R'}{n'}$.

Donc angle $AO\alpha = \frac{2\pi}{n}$ et angle $AO'\alpha' = \frac{2\pi}{n'}$.

Il s'agit de déterminer quelle doit être l'épaisseur $a\alpha$ de la dent de la première roue, pour que les contacts puissent avoir lieu comme sur la figure. Faisons $a\alpha = x$. Le point m étant l'extrémité de la dent, la droite mO passe par le milieu de l'arc $a\alpha$. On a donc $\alpha\mu = \frac{x}{2}$.

D'après la fig. 158 : tang. $m\,O\,A = \frac{m\,p}{O\,p}$ ou tang. $(A\,O\,\alpha - \alpha\,O\,\mu) = \frac{m\,p}{O\,p}$ ou tang. $\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) = \frac{m\,p}{O\,p}$.

Il reste à exprimer $m\,p$ et $O\,p$ en fonction des nombres n et n'. Soit φ l'angle $AO'\alpha' = \frac{2\pi}{n'}$, la droite $A\,m$ est normale au flanc $O'\alpha'$; $m\,p$ est perpendiculaire au rayon $O'A$, on a donc :

$$A\,m = R' \sin.\varphi,\ m\,p = A\,m \cos.\varphi = R' \sin.\varphi \cos.\varphi,\ A\,p = A\,m \sin.\varphi = R' \sin.^2\varphi.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions trouvées précédemment, on a :

$$\text{Tang.} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) = \frac{R' \sin.\varphi \cos.\varphi}{R + R' \sin.^2\varphi}.$$

Or :

$$\frac{R}{R'} = \frac{n}{n'} \text{ et } \varphi = \frac{2\pi}{n'};$$

$$\text{donc : tang.} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) = \frac{n' \sin.\varphi \cos.\varphi}{n + n' \sin.^2\varphi} = \frac{n' \sin.\frac{2\pi}{n'} \cos.\frac{2\pi}{n'}}{n + n' \sin.^2\frac{2\pi}{n'}}$$

$$\text{ou } n \text{ tang.} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) = \frac{\frac{n'}{2} \sin.\frac{4\pi}{n'}}{1 + \frac{n}{n'} \sin.^2\frac{2\pi}{n'}}.$$

Cherchons à déduire de cette expression la limite de la valeur de l'arc x.

Le terme $\frac{n}{n'} \sin.^2\frac{2\pi}{n'}$, qui se trouve au dénominateur du second membre de l'équation, est toujours positif et celui-ci toujours plus grand que 1. Il s'ensuit que :

$$n \left(\text{tang.} \frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) < \frac{n'}{2} \sin.\frac{4\pi}{n'}$$

et *à fortiori* :

$$n \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{x}{2R}\right) < \frac{n'}{2} \sin.\frac{4\pi}{n'} \quad . \quad . \quad [A].$$

La plus grande valeur que puisse avoir l'arc x c'est la division tout entière, auquel cas le vide se réduirait à zéro et la dent de la roue O' à une simple ligne droite. La plus grande valeur de l'angle $\frac{x}{2R}$ est donc une demi-division, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$. Dans ce cas l'inégalité ci-dessus devient :

$$\pi < \frac{n'}{2} \sin.\frac{4\pi}{n'}.$$

or, $\sin.\frac{4\pi}{n'}$ est plus petit que l'unité; le second membre est donc une fraction

de $\frac{n'}{2}$; et cette fraction est plus grande que π ; on a donc, à plus forte raison :

$$\frac{n'}{2} > \pi, \text{ ou } n' > 2\pi.$$

Ainsi dans le cas même où la dent de la roue O aurait pour épaisseur toute une division, et conséquemment aurait le profil le plus étendu possible, on devrait avoir $n' > 2\pi$, de sorte que $n' = 7$ est le plus petit nombre que l'on puisse prendre.

Si, nous rapprochant davantage de la pratique, nous supposons que l'épaisseur de la dent soit la moitié d'une division, c'est-à-dire qu'on ait $\frac{x}{R} = \frac{\pi}{n}$, l'inégalité (A) devient :

$$n\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) < \frac{n'}{2} \sin. \frac{4\pi}{n'},$$

$$\text{ou } \frac{3\pi}{2} < \frac{n'}{2} \sin. \frac{4\pi}{n'}, \text{ ou } \sin. \frac{4\pi}{n'} > \frac{3\pi}{n'}.$$

On tire de là $n' = 12$ environ.

De sorte, que si on fait $n' = 12$, l'épaisseur de la dent sera à peu près la moitié d'une division ; $n' = 13$ est donc à peu près la limite inférieure du nombre des flancs de la roue menée O'.

Saillie des dents.

170. Les recherches précédentes ont servi à fixer le nombre minimum des dents ; quelle sera leur saillie pour des nombres supérieurs ? Nous avons déjà vu comment on pouvait les déterminer graphiquement ; néanmoins, nous emprunterons encore à M. Willis d'intéressantes considérations sur la détermination des saillies des dents et l'influence de cette dimension sur les arcs d'*approche* (de contact en-deçà de la ligne des centres) et de retraite (au-delà de la ligne des centres).

Engrenage à flancs. Soient : $\varphi = TBd$ (fig. 159), l'arc de retraite qu'on veut obtenir ; G la saillie fd de la dent de la roue de rayon $AT = R_1$, N_1 le nombre de dents dont elle est armée ; G_2 R_2 N_2 les quantités correspondantes pour l'autre roue, a le pas de l'engrenage $= \frac{2\pi R_1}{N_1} = \frac{2\pi R_2}{N_2}$.

D'après le tracé de l'engrenage à flancs, T d étant perpendiculaire à Bd, on a : $Td = R_2 \sin. \varphi$. Le triangle dTA fournit d'ailleurs la relation $(R_1 + G_1)^2 = R_1^2 + Td^2 - 2R_1\, Td \cos. ATd$. Divi-

sant par R_1^2 et remarquant que cos. ATd = — cos. BTd = — sin. φ et mettant pour Td sa valeur, il vient :

$$\frac{R_1 + G_1}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2^2 + 2 R_1 R_2}{R_1^2} \sin.^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Développant ce binôme, remplaçant sin. φ par son développement en série $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$ négligeant la quatrième puissance de φ, ce qui est permis, puisque dans la pratique, cet angle est toujours assez petit, il vient :

$$\frac{G_1}{R_1} = \frac{2 R_1 R_2 + R_2^2}{2 R^2} \varphi^2.$$

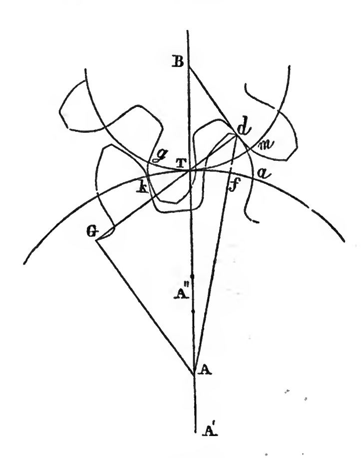


Fig. 159.

Appelant F le rapport de l'arc de retraite au pas,

$$F = \frac{Tm}{a} = \frac{R_2 \varphi N_2}{2 \pi R_2} \text{ d'où } \varphi = \frac{2 \pi F}{N_2}.$$

Ce qui donne, pour obtenir la saillie G_1 des dents de la roue qui mène, la relation

$$\frac{G_1}{a} = \pi F^2 \left(\frac{2}{N_2} + \frac{1}{N_1}\right).$$

La saillie G_2 des dents de la roue conduite, s'obtiendrait d'une manière analogue en retournant la figure et considérant alors l'arc T*m* comme un *arc d'approche; f* étant alors le rapport de l'arc d'approche au pas, on aurait, pour déterminer la saillie à la roue conduite,

$$\frac{G_2}{a} = \pi f^2 \left(\frac{2}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)$$

et enfin

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{F^2}{f^2} \left(\frac{2 N_1 + N_2}{2 N_2 + N_1}\right).$$

La longueur totale λ des dents mesurée suivant le rayon des roues, à partir du fond du creux, devra en pratique prendre la valeur :

$$\lambda = G_1 + G_2 + \frac{a}{10}$$

Observations. On remarque : 1° que la somme des arcs d'approche et de retraite doit être au moins égale au pas, ce qui suppose $F + f = 1$ au moins;

2° Que l'arc d'approche augmente avec la saillie de la roue menée, et que l'arc de retraite augmente avec la saillie de la roue qui mène ;

3° Que le coefficient, inconnu jusqu'ici, du frottement qui a lieu pendant *l'approche* étant sans aucun doute plus grand que celui qui a lieu pendant *la retraite*, on pourrait croire qu'il y aurait avantage à rendre nul l'arc d'approche, ce qui reviendrait à rendre nulle la saillie de la roue conduite ;

4° Qu'il faudrait alors, toutes choses égales d'ailleurs, augmenter l'arc de retraite de toute la valeur de l'arc d'approche, ce qui porterait le lieu du contact à une plus grande distance de la ligne des centres, et ferait croître ainsi rapidement le travail du frottement de retraite (nous avons vu déjà que l'étendue du glissement croîtrait) ; il pourrait arriver qu'on perdît plus d'un côté qu'on n'eût gagné de l'autre ;

5° On pense que, à défaut de données expérimentales suffisantes et dans l'ignorance complète où l'on est de la valeur relative des frottements d'*approche* et de *retraite*, il conviendra de diminuer l'arc d'approche (sans le rendre nul) et d'augmenter l'arc de retraite (si comme dans la pratique moderne on ne les conserve

égaux), ce qui revient à diminuer la saillie de la roue conduite et à augmenter la saillie de la roue qui mène.

La table suivante donne le rapport de ces saillies dans les trois hypothèses suivantes : $F = f$; $F = f\sqrt{2}$; $F = 2f$.

	VALEUR DE $\frac{N_1}{N_2}$.	VALEURS DE $\frac{G_1}{G_2}$.		
		$F = 2f$.	$F = f\sqrt{2}$.	$F = f$.
Le pignon mène. .	$\frac{1}{10}$	2,3	1,1	0,5
	$\frac{1}{7}$	2,4	1,2	0,6
	$\frac{1}{6}$	2,5	1,3	0,6
	$\frac{1}{5}$	2,8	1,4	0,7
	$\frac{1}{2}$	3,2	1,6	0,8
La roue mène. . .	1	4	2	1
	2	5	2,5	1,2
	4	6	3	1,5
	6	6,5	3,2	1,6
	10	7	3,3	1,6

171. *Engrenages épicycloïdaux.* Reportons-nous à la fig. 151, qui représente les dents tracées avec un même cercle décrivant ; soit Th, l'arc de retraite que l'on veut obtenir, décrivez l'épicycloïde interne hd, d sera par hypothèse le dernier point de contact ; Ad sera dès lors le rayon total de la roue qui mène, et dh le développement strict du flanc de la roue conduite. Une construction analogue, tracée de l'autre côté de la ligne des centres, donnerait la longueur des dents de la roue conduite et le développement des flancs de la roue qui mène.

172. *Engrenages à développantes.* Il suffit de faire le tracé de la figure 159 pour un engrenage à développantes, pour s'assurer que toutes les relations ci-dessus peuvent s'étendre à ce cas, et qu'on a par suite :

$$\frac{G_1}{a} = \pi F^2 \left(\frac{2}{N_2} + \frac{1}{N_1}\right) \text{ et } \frac{G_2}{a} = \pi f^2 \left(\frac{2}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right).$$

Il faut observer toutefois que, dans le cas des dents en développantes, ces formules ne donneront que la saillie qui permettra à une dent de continuer son action jusqu'au cercle de base de l'autre

roue, la construction ne s'appliquant qu'à des points de contact toujours extérieurs à celui-ci. Les formules ne s'appliqueraient pas dans ce cas, comme dans le précédent, à d'autres positions du contact.

173. *Autres dimensions des dents.* Elles sont généralement les suivantes dans les machines bien établies.

Largeur de la jante. Quatre fois l'épaisseur des dents quand la vitesse à la circonférence n'excède pas 1^m 50, cinq fois pour des vitesses supérieures, afin de diminuer l'usure.

Épaisseur. Soit P la force en mètres que l'engrenage doit transmettre, b l'épaisseur de la dent en centimètres, mesurée sur la circonférence primitive; on déduit de l'observation des dimensions adoptées par les meilleurs constructeurs :

Pour les dents	en fonte................	$b = 0{,}105\sqrt{P}$,
id.,	en bronze ou cuivre..	$b = 0{,}131\sqrt{P}$,
id.	en charme ou sorbier.	$b = 0{,}138\sqrt{P}$.

TRACÉ PRATIQUE DES DENTS.

174. La portion de courbe qui forme le contour d'une dent a toujours un développement assez faible pour qu'on puisse lui substituer un ou deux arcs de cercle au plus sans erreur sensible; c'est ce qui a toujours lieu dans la pratique. Toute la difficulté consiste à déterminer les centres et les rayons de ces arcs.

Nous ne parlerons pas du procédé employé quelquefois, qui consiste à tracer une dent en plaçant le centre d'un compas à l'origine de la dent suivante. Ce n'est qu'un moyen grossier que les bons ateliers doivent abandonner pour adopter des procédés basés sur les résultats de la théorie.

175. *Tracé de la dent par un seul arc de cercle.* Si nous nous reportons à l'art. 133, nous y trouvons une méthode pour le tracé qui nous occupe. Menons par le point de contact T (fig. 133) une droite PTQ de direction qui peut être quelconque, mais qu'il est mieux de faire telle que $PTA = 75°$ pour avoir des dents de forme convenable. Abaissons Ar perpendiculairement à cette ligne et prenons le point r pour le centre des dents d'une des roues, le centre de courbure de l'enveloppe sera le point S obtenu en menant BS parallèle à Ar, puisque le point K est alors à l'infini.

Pour tracer rapidement les dents de la roue, il convient, du centre A, de décrire la circonférence du rayon A r, qui devient le lieu des centres de courbure des dents de la roue; puis d'une ouverture de compas égale à rT, et en prenant pour centres les divisions tracées sur le cercle primitif en raison du nombre de dents, on trace les contours de celles-ci.

Les dents ainsi tracées se rapprochent beaucoup des dents en développantes, il suffirait que le centre r se déplaçât quelque peu pendant le tracé des dents pour qu'elles eussent cette forme. Elles participent des avantages et des inconvénients de ce genre de dents; toutefois, comme elles sont tracées à l'aide d'un seul arc de cercle, il n'y a qu'une position pour laquelle le rapport des vitesses auxiliaires reste rigoureusement constant, c'est celle où le point de contact se trouve sur la ligne des centres.

176. *Tracés des dents par deux arcs de cercle.* On obtiendra un degré d'exactitude bien plus grand et qui satisfera amplement à tous les besoins de la pratique en traçant le flanc et la face de chaque dent, chacun par un arc de cercle, avec la condition que le point d'action exact de l'un soit situé un peu en deçà de la ligne des centres, et celui de l'autre un peu au-delà de cette ligne et à la même distance, égale à la moitié du pas par exemple.

La fig. 160 montre l'application de cette méthode, qui a été introduite par M. Willis dans les ateliers anglais.

A est le centre de rotation de la première roue, B celui de la seconde roue avec laquelle la première engrène.

T est le point de contact de leurs circonférences primitives; par ce point T menez une droite Q T q, faisant, avec la ligne des centres, un angle P T A = B T q qui peut être quelconque; celui de 75° est préférable pour que les dents aient une forme convenable.

Menez à cette droite Q T q et par le point T une perpendiculaire indéfinie, et marquez sur cette perpendiculaire deux distances égales TK, Tk qui peuvent être quelconques, mais plus petites toutefois que le plus petit rayon primitif AT. Par l'extrémité K de cette perpendiculaire et par le centre B menez BK, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre Q avec Q T q. Joignez K au centre de la roue A, cette droite coupera QTq en un point P.

P est le centre de courbure des *faces* de la roue A, et Q est le centre de courbure des *flancs* de la roue B contre lesquels agissent

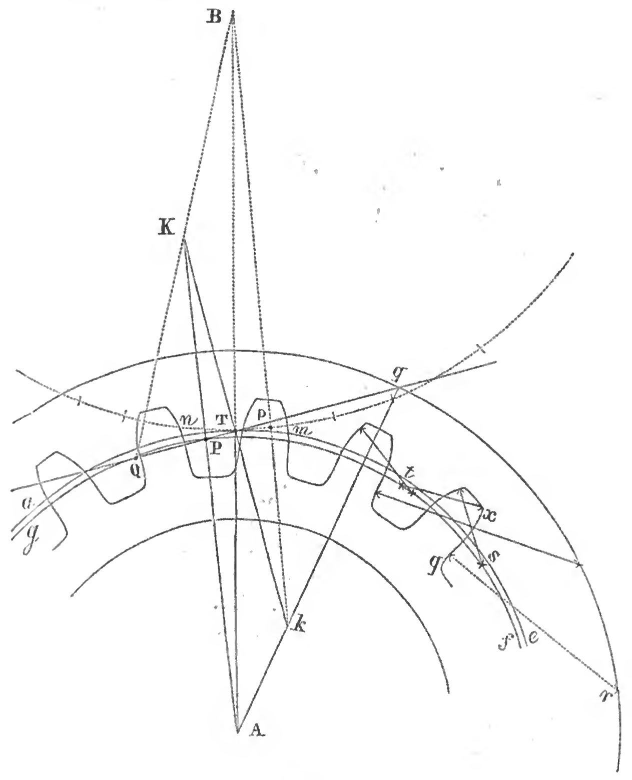


Fig. 160.

ces faces. C'est encore l'application des principes de l'art. 133.

Pour avoir les rayons de courbure, prenez sur la circonférence primitive de la roue A un point *m*, situé à une distance de T égale à la moitié du pas, de l'autre côté de la ligne des centres par rap-

port à P et à Q. Pm sera le rayon de courbure des faces de la roue A, et Qm le rayon de courbure des flancs de la roue B ; les premières seront donc convexes et en saillie sur la circonférence A, les secondes seront concaves et à l'intérieur de la circonférence B. En opérant sur la roue B, comme nous l'avons fait pour la roue A, en traçant les lignes Ak et Bk, on aura les centres p et q, et les rayons de courbure $p\,n$ et $q\,n$ des *flancs* de la roue A et des faces de la roue B.

Pour achever le tracé de l'engrenage, on décrira du centre A et du rayon Aq une circonférence qui sera le lien des centres de courbure de ses flancs, dont les rayons de courbure $= q\,n$. Une autre circonférence de rayon AP contiendra les centres de courbure de ses faces, dont les rayons $=$ Pm.

Il importe de remarquer que les dents de la roue A, par exemple, ne changeraient pas de forme, quand bien même la roue B, avec laquelle elle engrène, aurait un rayon différent de BT, pourvu toutefois que les distances KT $=$ Tk $=$ C demeurassent constantes. Quelque puisse être, en effet, la position de B sur la ligne des centres, cette position n'affecterait que la position des centres de courbure Q et p des dents de cette même roue BT, sans rien changer à la situation des centres de courbure P et q de la roue AT.

Il en résulte que quelque soit le nombre de roues d'un système pour lequel les lignes Qq et Kk conserveront les mêmes positions angulaires, par rapport à la ligne des centres et les droites KT $=$ Tk la même valeur absolue C, deux quelconques de ces roues marcheront ensemble convenablement.

On peut d'ailleurs déterminer la distance KT dans un tel système en remarquant que si A se rapproche de T, Aq qui tend d'abord à devenir parallèle à Tq, dépasse ensuite cette position ; q, dans le cas du parallélisme, est rejeté à l'infini et le flanc de la roue A devient une ligne droite perpendiculaire à PTq. Lorsque la position de A qui rend Tq parallèle à PTq est dépassée, le centre de courbure q, des flancs de A, se trouve situé de l'autre côté de T et ces flancs deviennent alors convexes, ce qui donne aux dents une forme bizarre, inadmissible à cause des arcs-boutements.

Il est donc rationnel de donner à KT, pour valeur maximum, celle qui combinée avec le plus petit rayon du système rendrait Aq

parallèle à Tq. r étant dès lors la plus petite roue d'un système d'engrenages, on a : $KT = r$ sin. QTA ou $C = r \sin. \theta$, en appelant θ l'angle de la droite PTq et de la ligne des centres.

Si l'on veut calculer pour une autre roue quelconque la distance d du point de contingence T au centre P de courbure des faces, et celle D au même point T du centre de courbure q des flancs, on les aura facilement en fonction des quantités connues. En effet, dans la fig. 160, menant AR perpendiculaire à PTq, on a :

$$AR : PR :: KT : PT.$$

Remplaçant ces quantités par leurs valeurs et posant :

$$PR = TR - PT, \text{ on a :}$$

$$d = PT = \frac{KT \times PR}{AR} = \frac{r \sin. \theta \times (R \cos. \theta - d)}{R \sin. \theta}$$

$$= \frac{Rr \cos. \theta - rd}{R},$$

$$\text{d'où } (R + r)\, d = Rr \cos. \theta \text{ et } d = \frac{Rr \cos. \theta}{R + r}.$$

En opérant de même pour l'autre cercle, on trouverait :

$$D = \frac{Rr \cos. \theta}{R - r} = qT.$$

Donnant à r et à θ les valeurs constantes qu'on juge les plus convenables pour ce système général d'engrenages, on calcule et l'on dispose facilement en tables numériques les valeurs de D et d correspondantes à différents rayons et à différents pas, et on se trouve ainsi dispensé de faire un tracé complet pour chaque cas, ce qui rend cette méthode très avantageuse dans la pratique.

DU FROTTEMENT DANS LES ENGRENAGES.

177. Représentons par N la pression normalement aux courbes en contact, fN sera la valeur du frottement. Le chemin parcouru par ce frottement, pour une rotation correspondant à un arc infiniment petit ds des deux circonférences primitives, est celui du glissement que nous avons trouvé égal à $pds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ pour l'engrenage extérieur (et $pds\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$ pour l'engrenage intérieur).

Le travail absorbé par le frottement sera donc en chaque instant :

$$f\mathrm{N}p\,ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right).$$

A mesure que le nombre des dents augmente, la normale p s'éloigne de moins en moins de la tangente au point de contact des circonférences primitives, et par suite la force N se rapproche beaucoup de la force résistante Q, qui agit tangentiellement à la circonférence, pour le cas du mouvement régulier que nous considérons, puisque $\mathrm{Q}=\mathrm{N}\sin.\alpha$ et que α approche beaucoup de 100°; la valeur $\mathrm{Q}fp\,ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)$ est donc une limite vers laquelle tend l'expression du travail du frottement en chaque instant, quand on augmente le nombre des dents, et qui ne pèchera que par un léger excès quand ce nombre ne sera pas considérable. Prenons donc cette expression pour valeur du travail du frottement en un point de contact pour lequel la normale est p, et pour un arc ds.

Le contact a lieu, en général, également de chaque côté de la ligne des centres pour laquelle $p=o$ et le frottement est nul. Comme d'ailleurs la direction de la normale se rapproche beaucoup de la tangente au point de contact des deux cercles primitifs, on peut, pour avoir la valeur moyenne du travail du frottement pour les diverses positions de l'arc ds, remplacer la valeur moyenne de 0 à p ou $\frac{p}{2}$, par une longueur de l'arc s de roulement égale à une demi-division $\frac{a}{2}$, c'est-à-dire à $\frac{\pi\mathrm{R}}{n}$, on a alors :

$$[1]\ldots\mathrm{T_f}=\mathrm{Q}f\frac{\pi\mathrm{R}}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)ds,$$

et comme $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}=\frac{n}{n'}$ $\mathrm{T_f}=\mathrm{Q}f\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)ds.$

De la forme de l'équation [1] on déduit, en la divisant par ds, l'effort moyen, qui appliqué tangentiellement aux circonférences primitives, produirait le même travail que le frottement pour le roulement ds, et cet effort est :

$$[2]\ldots\ldots\quad f\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)\frac{a}{2}\ (1).$$

Si l'on remplace le petit arc ds, dans l'expression du travail du

(1) Si l'on compare le frottement moyen, *à amplitude égale*, lorsque le contact

frottement, par une longueur d'une division, $a = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}$, le travail dû au frottement, pendant le contact de deux dents pour une division, sera :

$$T_f = \pi f Q \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) \frac{2\pi R'}{n'},$$

et en multipliant par n', on aura le travail dû au frottement pour un tour entier de la deuxième roue.

Or, $Q \times 2\pi R'$ est le travail T_r, dû à la force résistante qui agit sur la deuxième roue pendant un tour de celle-ci, le travail du frottement devient donc :

$$T_f = \pi f T_r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Comme les forces motrices et résistantes P et Q sont très peu différentes, et T_m le travail moteur transmis pendant un tour de roue peu différent du travail résistant, on peut prendre pour valeur du travail dû au frottement pendant le même temps :

$$T_f = \pi f T_m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) \ldots . [3]$$

D'après la formule [3], on voit que le travail du frottement est proportionnel à l'expression $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$, et à $\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}$ pour les engrenages intérieurs, pour lesquels il est donc moindre que pour les engrenages extérieurs à nombre de dents égal), c'est-à-dire d'autant moindre que le nombre des dents est plus grand. D'où l'on conclut cette règle de la pratique qu'il faut multiplier, autant que possible, le nombre des dents, pour diminuer le travail du frottement, avoir moins d'usure, des mouvements plus doux.

Engrenages sans frottement de glissement.

178. Puisque le frottement diminue quand le nombre de dents augmente, on peut rendre ce frottement presque nul par la disposition représentée sur la fig. 161, qui consiste, au lieu de faire les

a lieu d'un seul côté de la ligne des centres ou également de chaque côté, on voit que les valeurs moyennes de p peuvent être considérées comme doubles dans le premier cas, de ce qu'elles sont dans le second et par suite aussi le travail du frottement. C'est par ce motif que, dans la pratique moderne, on met les dents en prise également de chaque côté de la ligne des centres ; les progrès de l'art de la construction des machines permettant de le faire sans aucun danger.

profils des roues cylindriques, de les former de profils égaux et de faible épaisseur, ayant tourné les uns sur les autres, d'une quantité aussi petite qu'on le voudra. Les dents figureront une suite de degrés tels que les marches d'un escalier.

Les dents de l'autre roue devront pareillement être formées de circonférences superposées, et correspondre aux circonférences de la première roue. Elles formeront de même une sorte d'escalier (figure 162) dont les degrés correspondront à ceux de la première

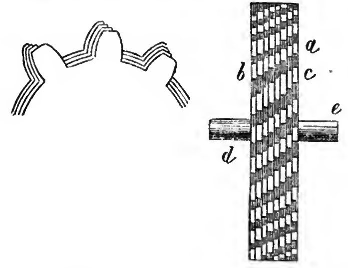


Fig. 161. Fig. 162.

roue, de manière à venir se mettre successivement en contact avec eux dans le mouvement des deux roues. Le frottement sera d'autant moindre, que le nombre de ces degrés sera plus grand, car le nombre des dents de chaque roue sera multiplié par le nombre des plaques superposées.

179. On peut supposer le nombre des plaques infini, de manière que les profils des roues forment une surface continue, qui rencontrera une surface cylindrique dont les génératrices seraient parallèles à l'axe de la première roue suivant une certaine courbe.

Les dents de la deuxième roue formeront de même une surface continue, qui rencontrera une surface cylindrique tangente à la première et engendrée par une droite parallèle à l'axe de la deuxième roue, suivant une deuxième courbe dont les points devront venir dans le mouvement des deux roues, s'appliquer respectivement sur les points de la première courbe, de manière que les deux courbes soient continuellement en contact comme si elles roulaient l'une sur l'autre.

On voit que, dans ce mouvement, les deux surfaces seront à

chaque instant en contact par un seul point situé sur une ligne représentant un profil de dent *sans épaisseur* ; et après le plus petit mouvement de rotation, elles seront en contact sur une autre ligne ou profil de dent, également sans épaisseur ; il n'y aura donc pas de frottement de glissement, comme l'indique la formule qui donne l'expression du frottement lorsque n et n' deviennent infinis ; mais seulement un frottement de roulement. Cet engrenage présentera donc, sous ce rapport, un grand avantage sur les engrenages ordinaires.

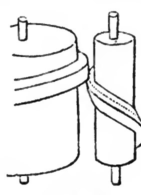


Fig. 163.

On peut prendre la ligne des contacts (fig. 163) sur le premier cylindre tout à fait arbitrairement ; il faudra seulement que la ligne correspondante sur le deuxième cylindre soit telle que dans le mouvement de rotation des deux cylindres les points de ces deux lignes viennent successivement en contact. Pour cela la première ligne étant prise à volonté, on la développera sur un plan tangent au cylindre, puis on enroulera ce plan sur le deuxième cylindre. La courbe se trouvera de la sorte convenablement tracée.

Il est plus simple de tracer une ligne dans le plan tangent aux deux cylindres, et d'enrouler successivement ce plan sur ceux-ci ; on applique de la sorte la ligne tracée successivement du plan sur les deux cylindres, sur lesquels elle engendre deux courbes convenables, puisqu'elles viendront se superposer successivement par le mouvement de rotation. Pour mettre ces courbes en saillie et les adapter à des cylindres d'un moindre diamètre que les précédents, on fait passer par celles-ci des surfaces saillantes engendrées par les normales aux cylindres.

Ces deux surfaces, suffisamment prolongées, représentent deux dents continues qui ne se toucheront toujours qu'en un point situé sur les courbes qui leur servent de base.

La solution la plus simple consiste évidemment à prendre une ligne droite dans le plan tangent, les courbes sur les cylindres sont alors deux hélices qui deviendront la base de deux surfaces héliçoïdales. La fig. 163 représente cette disposition.

Le contact ayant lieu par une arête, celle-ci s'émoussera par l'usage (fig. 164 et 165), mais pour de petits efforts l'arête se trouvera remplacée par une partie circulaire pour laquelle le contact a lieu à peu près comme sur l'arête vive. Ces engrenages sont dits de précision; le contact n'ayant lieu que par un point, ils ne pourraient, sans s'user

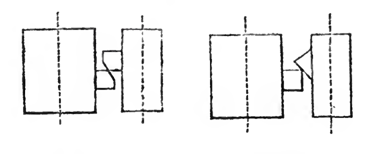


Fig. 164. Fig. 165.

très rapidement, transmettre des efforts considérables. M. Bréguet les a utilisés avec succès pour faire mouvoir des axes avec une vitesse extrêmement considérable, de huit mille tours par seconde. Pour des roues de peu d'épaisseur, les fractions d'hélices, pouvant se confondre avec des petites lignes droites inclinées (fig. 168) sont faciles à exécuter, et pourront s'employer avec avantage dans des machines construites avec soin, dans lesquelles de petites forces sont en jeu.

Les fig. 166 et 167 montrent la disposition de roues d'engre-

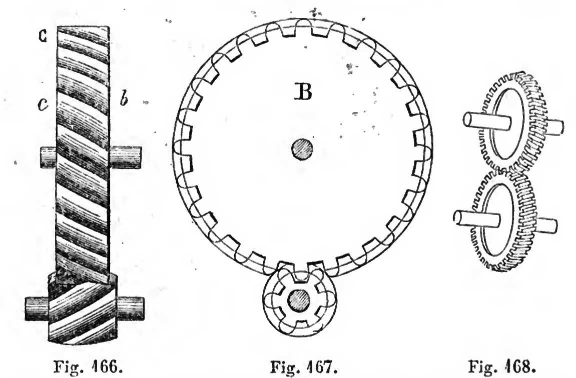


Fig. 166. Fig. 167. Fig. 168.

nage plus épaisses construites ainsi que nous venons de l'expli-

quer ; et en se reportant à ce que nous avons dit précédemment pour les autres conditions à remplir par tout engrenage.

Nous eussions dû parler de ces engrenages à frottement de roulement, en traitant dans la première section de ce chapitre des organes agissant par contact immédiat et à frottement de roulement. Mais il faut remarquer que nous ne parlions que des sections planes de rouleaux et de dents cylindriques; alors il est exact de dire, comme nous l'avons démontré, que des cercles peuvent seuls se conduire avec frottement de roulement.

Dans le cas que nous considérons actuellement au contraire, et qui ne pouvait guère être compris qu'après ce que nous avons dit sur les engrenages à frottement de glissement, le contact change de plan à chaque instant, quitte le plan perpendiculaire à l'axe en un point pour entrer dans un plan parallèle passant par le point suivant.

Nous répéterons encore l'observation déjà faite que ce genre d'engrenages ne peut servir à transmettre des efforts un peu considérables, le contact n'ayant jamais lieu que par un point; il est facile de démontrer que le contact entre les dents ne saurait avoir plus d'étendue. Si en effet, il avait lieu suivant une ligne, le lieu des contacts successifs engendrerait une surface et non plus une courbe. La section par un plan perpendiculaire à l'axe déterminerait donc deux courbes planes, qui se conduiraient dans un rapport de vitesse constant et cependant ne seraient pas des cercles, ce que nous avons vu être impossible.

Organes où l'action a lieu à l'aide d'intermédiaires rigides.

180. L'organe qui répond à la solution dont nous avons à traiter est la bielle. M. Tom Richard, résumant les travaux de M. Willis, en a donné, dans son *Aide-Mémoire des Ingénieurs,* une intéressante théorie. Nous lui empruntons ce qui suit.

La bielle consiste en une barre articulée à ses deux extrémités, à deux plateaux ou à deux rayons ou manivelles, tournant autour de deux axes de rotation. Nous allons étudier les vitesses relatives des deux rayons pour des positions diverses de la bielle.

Rapport des vitesses. Soient A P, B Q deux bras qui se meuvent autour des centres respectifs A, B (fig. 169) ; P Q une bielle articulée

aux extrémités P et Q de ces bras ; AR, BS les perpendiculaires à la direction de la bielle menées des centres respectifs A et B ; Ap, Bq, pq les positions infiniment voisines que prennent AP, BQ, PQ par le mouvement du système. Par p et q menez les perpendiculaires pm, qn à la première direction de la bielle, les triangles Ppm, APR sont rectangles, Pp est perpendiculaire à AP et Pm à AR, l'angle en P du triangle infinitésimal est donc égal à l'angle en A de APR. Ces triangles sont donc semblables. On

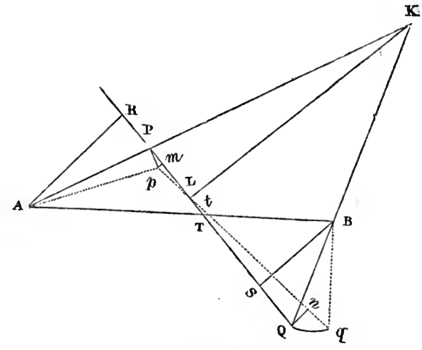


Fig. 169.

prouvera facilement la similitude des triangles qnQ (évidemment égal à celui obtenu en abaissant du point q une perpendiculaire sur le prolongement PQ) et BSQ et de ceux ART et BST. On a donc :

$$Pp : Pm :: PA : AR,$$
$$qn : Qq :: BS : BQ,$$
$$AT : BT :: AR : BS.$$

Combinant ces rapports, on a finalement :

$\frac{Pp}{AP} : \frac{Qq}{BQ} :: \frac{BS \times Pm}{AR \times qn}$, et, comme, ainsi nous le verrons ci-après, $Pm = qn$; on a donc les deux proportions :

$$\frac{Pp}{AP} : \frac{Qq}{BQ} :: BS : AR. \; . \; . \; [1],$$

$$\text{et } \frac{Pp}{AP} : \frac{Qq}{BQ} :: BT : AT. \; . \; . \; [2];$$

c'est-à-dire [2] *que les vitesses angulaires des bras* AP, BQ *sont entre elles, à chaque instant, en raison réciproque des segments de la ligne des centres* AB *déterminés par la rencontre* T *de cette droite avec la direction* PQ *de la bielle*, relation identique avec celle déjà trouvée pour les vitesses de deux courbes qui se poussent, dont P et Q seraient les centres de courbure au point de contact, la longueur de la ligne PQ ne changeant pas pour un déplacement infiniment petit.

Ou bien [1] *que les vitesses angulaires des bras* AP, BQ *sont réciproquement comme les perpendiculaires abaissées des centres de mouvement* A *et* B *sur la direction de la bielle.*

Prolongeant AP et PQ jusqu'à leur rencontre en K, abaissant KL perpendiculairement à la bielle PQ, on a :

$$pm : Pm :: PL : KL,$$
$$qn : Qn :: KL : QL,$$

et comme à la limite $qn = Pm$, il vient :

$$pm : Qn :: PL : QL,$$

ce qui montre que L pied de la perpendiculaire, est l'intersection de deux positions de la bielle infiniment voisines.

Si les chemins parcourus par P et par Q étaient dirigés suivant une droite ou une courbe autre qu'un cercle, on aurait à cause de $Pm = qn$, $Pp \cos. pPm = Qq \cos. Qqn$, ou

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{\cos. Qqn}{\cos. pPm},$$

c'est-à-dire que les chemins élémentaires seraient entre eux réciproquement comme les cosinus des angles de la bielle avec les directions respectives du mouvement.

Nous avons admis dans tout ce qui précède que l'on pouvait poser $Pm = qn$. En effet, $PQ = pq$, la longueur de la bielle est constante; or α étant l'angle en L de la rotation angulaire de la bielle, angle infiniment petit, on a :

$$PQ = Pm + Lp \cos. \alpha + LQ,$$
$$pq = qn + LQ \cos. \alpha + Lp.$$

Or α étant infiniment petit, $\cos. \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \ldots$ se réduit à 1, et l'on a :

$PQ = Pm + Lp + LQ = pq = qn + LQ + Lp$, égalité qui ne peut être satisfaite que par $Pm = qn$. Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Si le point d'intersection T de la bielle et de la ligne des centres était placé à une distance infinie; ce qui aurait lieu pour toutes les positions possibles du système si la bielle PQ était parallèle et égale à la ligne des centres AB, alors les bras seraient égaux, les vitesses angulaires deviendraient elles-mêmes égales, et leur rapport serait dès lors constant. Dans tous les autres cas le point T se déplaçant, le rapport des vitesses est constamment variable. Donc le transport du mouvement circulaire à distance, par l'intermédiaire de bielles, ne s'effectue de manière que le rapport des vitesses angulaires soit constant, que pour des vitesses angulaires égales des axes.

181. Le mécanisme de la fig. 170, dans laquelle les rayons des deux cercles B et D sont égaux, offre deux combinaisons, l'une pour laquelle le rapport des vitesses angulaires est constant, parce que la bielle et la ligne des centres sont parallèles; l'autre pour laquelle il est variable, parce que les projections de la bielle et de la ligne des centres se rencontrent.

Pour l'une et pour l'autre de ces combinaisons, il arrivera que lorsque par la rotation du point *d*, ce point passera par la ligne des centres, soit en *a*, soit en *s*, l'extrémité *f* de l'autre bras passera en même temps par la même droite aux points *p* ou *t*. A l'époque de ces deux phases du mouvement, les deux positions possibles *fd*, A*d* de la bielle coïncident; en partant de chacune de ces phases, la bielle, abstraction faite de l'inertie et du poids des pièces, peut en quelque sorte, choisir entre ces deux positions. Ainsi, par exemple, en partant de la position B*a* et B*p*, le point *a* se mouvant vers *d*, le point *p* peut ou s'avancer vers *f*, cas pour lequel la bielle est parallèle à la ligne des centres, ou reculer vers A, cas pour lequel la bielle croisera la ligne des centres jusqu'à ce que le point *d* soit parvenu en *s* et le point A

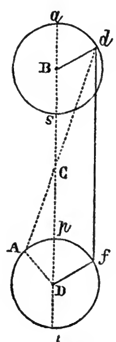


Fig. 170.

en *t*. A cet instant, le cas d'instabilité se présentera de nouveau, sans toutefois qu'il puisse jamais avoir lieu pour une position quelconque de B*d*, prise entre les positions B*a*, B*s*. Les deux phases d'instabilité, pour lesquelles les deux bras coïncident avec la ligne des centres, se nomment les *points morts* du système.

Lors donc qu'on emploiera ce mécanisme avec l'intention que le rapport des vitesses soit constant, il faudra faire en sorte qu'en passant aux *points morts*, la bielle conserve son parallélisme avec la ligne des centres.

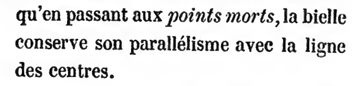


Fig. 171.

182. Trois moyens se présentent pour atteindre ce but :

1° On peut introduire dans le système un troisième bras C*c* (fig. 171), égal aux deux autres, dont l'axe sera en outre situé sur la ligne des centres, et dont l'extrémité *c* devra partager la bielle dans le même rapport que l'axe C divise la ligne des centres. Le nouvel axe C peut d'ailleurs être placé entre les premiers A et B, ou en dehors de A et B et sur le prolongement de cette droite.

Il n'est même point indispensable que les axes des trois bras égaux se trouvent sur une même droite, il suffit, quelle que soit la forme de la bielle, que les trois articulations *a*, *b*, *c* forment un triangle égal à celui des trois axes et semblablement placé.

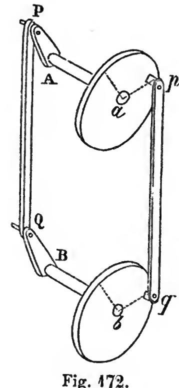


Fig. 172.

183. 2° Le second moyen n'exige que deux axes, mais il y a deux systèmes de bras. La fig. 172 peut en donner une idée. A*a*, B*b* sont deux axes parallèles, portant à l'une de leurs extrémités deux bras égaux AP = BQ articulés avec la bielle PQ = AB; les au-

tres extrémités des axes portent un système *semblable*. Quant à l'angle compris entre les directions AP et *a p*, il peut être quelconque, mais il convient mieux de le faire = 90°, afin qu'un système de bras soit aussi éloigné que possible des *points morts*, lorsque l'autre système de bras passe lui-même par ces points. On voit, du reste, qu'il est indifférent de donner telle ou telle autre forme aux pièces de rotation AP ou *ap*, la longueur du bras n'étant mesurée que par la distance de l'axe à l'articulation dans le plan de rotation.

Si l'un ou l'autre axe, ou tous deux, rencontraient le plan dans lequel la bielle se meut, la rotation ne pourrait jamais être complète. Pour rendre possible une rotation continue, il faudrait ou bien que la pièce qui porte les articulations fût fixée tout à l'extrémité de l'axe, comme fig. 172, ou employer des axes *coudés*, ce qui leur permet d'accompagner sans cesse la bielle dans son mouvement, et d'être d'une longueur indéfinie.

184. 3° Le troisième moyen de faire passer aux bielles le passage des *points morts* est indiqué fig. 173 et 174. Ainsi que le précédent,

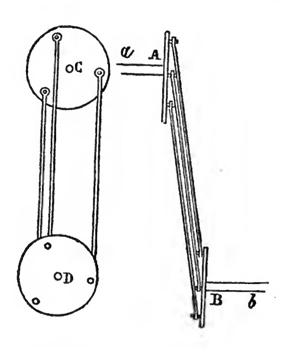


Fig. 173. Fig. 174.

il consiste dans l'emploi de deux ou plusieurs bras et d'un nombre égal de bielles. Ici les axes A *a*, B *b* ont encore des directions parallèles, mais ils ne se font plus face. Des disques de forme convenable, comme C, D, sont fixés à l'extrémité libre de chacun d'eux. Des chevilles sont implantées dans les faces de ces disques sur une

même circonférence qu'elles divisent en parties égales ; enfin des bielles s'articulent aux chevilles. Les plans de rotation des disques laissent entre eux une distance suffisante pour que les bielles prennent une position un peu oblique qui leur permet de passer par-dessus les chevilles d'attache. Le nombre des bielles est d'ailleurs indifférent, deux (à 90°) suffiraient.

185. *Frottement.* Le frottement qui s'exerce sur le point d'attache, appelé habituellement le bouton de la manivelle, est facile à évaluer. Si P est la force qui est transmise dans la direction de la bielle, cette force fera toujours porter le bouton de la manivelle au fond du coussinet à l'extrémité de la course descendante et à la partie supérieure à l'extrémité de la course ascendante. Dans chacune de ces courses le frottement se sera donc produit sur une demi-circonférence du coussinet, c'est-à-dire que le chemin parcouru par le frottement sera πr, r étant le rayon du bouton de la manivelle. Or, la valeur de ce frottement est Pf, donc le travail du frottement pour un tour entier sera $2\pi r P f$, valeur en général très petite, r étant très petit.

186. Nous citerons encore une disposition curieuse, dite *joint de Odlham,* que la figure représente, et qui permet de transmettre par une espèce d'articulation à glissement, une égale rotation entre deux axes parallèles. A a, B b sont ces deux axes.

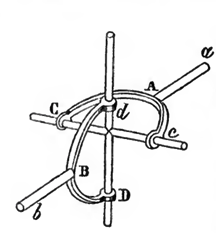


Fig. 175.

L'axe A a (fig. 175) est terminé par une pièce demi-circulaire C A c formant deux branches, terminées par deux trous forés dans la direction d'une ligne perpendiculaire à l'axe.

L'axe B b est muni d'une pièce semblable D B d, et tout est ajusté de manière que les quatre trous se trouvent dans un plan perpendiculaire aux deux axes. Une croix à quatre branches polies passe dans ces trous comme l'indique la figure, et ces branches sont de diamètre convenable pour pouvoir chacune glisser dans les trous qu'elles traversent. Lorsqu'un des axes tourne, il communique à l'autre précisément la même rotation.

Représentons une section de la croix dans le plan perpendiculaire aux axes A et B (fig. 176). Soient DA, CB les branches de la croix dans une première position. Lorsque D parviendra en d, C sera en c, et il est facile de voir que l'angle DAd = CBc. Donc la rotation angulaire des axes sera la même. Il n'est pas besoin de dire que cet organe n'est que curieux, et que les frottements qui s'y produisent le rendent tout à fait défectueux dans la pratique.

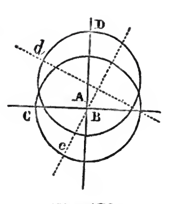


Fig. 176.

2° AXES QUI SE RENCONTRENT.

1° Organes agissant par contact immédiat et avec frottement de roulement.

187. Soient AB, AC deux axes se coupant en A (fig. 177), qui doivent se mouvoir avec des vitesses angulaires dans un rapport constant et égal à $\frac{m}{n}$.

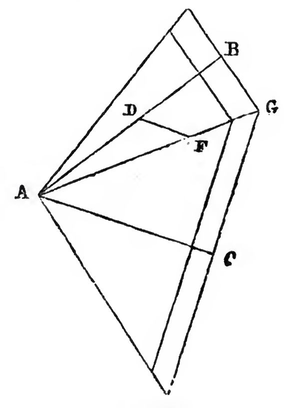


Fig. 177.

Par un point quelconque de l'un d'eux, de AB par exemple, on mènera une parallèle DF à AC.

Prenons DF, tel que DF : AD dans le rapport des vitesses, et traçons la ligne AFG. Abaissons par le point G les perpendiculaires GB, GC, la rotation des triangles rectangles ACG, ABG, autour des axes AB et AC, engendrera deux cônes droits qui se conduiraient mutuellement par l'adhérence de leurs surfaces convexes comme les rouleaux cylindriques dans le cas de deux axes parallèles, c'est-à-dire qu'ils rouleraient l'un sur l'autre sans glissement, et que leurs vitesses angulaires seraient dans un rapport constant et égal au rapport inverse des rayons R_1 R_2 des bases de chacun des cônes.

En effet on a :

$$\frac{DF}{AD} = \frac{\text{sin. } DAF}{\text{sin. } AFD} = \frac{\text{sin. } DAF}{\text{sin. } GAC} = \frac{BG}{GC} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{n}{m}.$$

Angles au sommet. On déduit facilement de ce qui précède la valeur des angles au sommet.

Soit θ l'angle BAC des deux axes, K le 1/2 angle au sommet du cône AB, le rapport ci-dessus devient :

$$\frac{\text{sin. } K}{\text{sin. } (\theta - K)} = \frac{m}{n}, \text{ ou tang. } K = \frac{\text{sin. } \theta}{\frac{m}{n} + \text{cos. } \theta}.$$

Lorsque l'angle θ est droit :

$$\text{tang. } K = \frac{n}{m}.$$

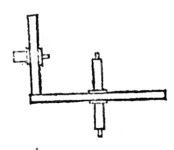
183. Si la résistance excède la valeur du frottement de roulement, on ne peut employer comme organes de transmission le système de deux rouleaux coniques. On peut alors, toutefois pour de faibles résistances, encore employer un engrenage conique à frottement de roulement, construit d'après les principes que nous avons exposés en traitant des engrenages cylindriques.

Si l'on trace dans le plan tangent commun aux deux cônes une ligne quelconque, et qu'on enroule ce plan sur chacun de ceux-ci, les lignes tracées sur les cônes rouleront l'une sur l'autre dans le mouvement. La plus simple des lignes que l'on puisse prendre est la ligne droite, qui en s'enroulant autour de chaque cône, produit une spirale dont la projection est une spirale d'Archimède ($\rho = a\,\omega$).

Pour que ces courbes puissent se conduire, il faut les *habiller*, c'est-à-dire les mettre en saillie, de manière que ce soit par elles que le contact ait lieu. Pour cela on fait glisser le long de cette courbe une ligne, toujours semblablement disposée relativement à chaque élément de celle-ci. La surface héliçoïde que nous avons décrite à propos des roues cylindriques est une surface de ce genre.

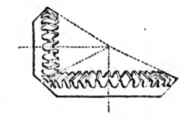
Par de semblables surfaces répétées on formera les surfaces des dents de deux roues, se touchant suivant des points répartis sur les lignes de contact, déterminées comme nous venons de le dire; les deux axes seront conduits par contact immédiat et à frottement de roulement, par des engrenages de *précision*, c'est-à-dire pour lesquels le contact des dents n'a lieu qu'en un point.

189. Si les deux axes forment un angle droit, on peut employer le système représenté fig. 178, qui ne comporte que des roues cylindriques. Sur un des axes est monté une roue plate sur laquelle repose la jante d'une roue de faible épaisseur (autrement le glissement, la différence du mouvement entre les deux cercles de base de la roue serait sensible) montée sur l'autre axe. Le mouvement de la première roue fera marcher la première, pourvu que la résistance à surmonter soit inférieure à la valeur du frottement du glissement au contact des deux surfaces.


Fig. 178.

2° Organes à contact immédiat et frottement de glissement.

190. Comme pour les engrenages plans, le problème à résoudre pour transmettre des efforts un peu considérables, est d'armer les cônes primitifs d'aspérités qui les fassent se mouvoir, comme s'ils se conduisaient par simple contact; toute la différence de ce cas avec celui des axes parallèles, est que la surface des dents doit être conique au lieu d'être cylindrique. Telle est la disposition de l'engrenage conique ou *roue d'angle* que représente la fig. 179.


Fig. 179.

Les mêmes considérations et la même solution générale des engrenages plans s'appliquent aux engrenages coniques, c'est-à-dire que s'étant donné la surface d'une dent d'un des cônes, la surface des dents de l'autre cône s'en déduira, et sera la surface enveloppe de la première.

Remarquons que les engrenages coniques seront très voisins des engrenages extérieurs si l'angle des plans qui les renferment est obtus, et des engrenages intérieurs, et par suite impossibles le plus souvent, si cet angle était aigu. Aussi l'angle droit est-il la limite inférieure adoptée dans la pratique et, sauf ce cas, l'on peut toujours, en prolongeant l'un des axes s'il est nécessaire, faire faire aux plans des roues un angle obtus.

Les solutions les plus simples seront toujours celles qui correspondront à l'engrenage à flancs et à l'engrenage à développantes. Passons ces deux cas en revue.

191. *Engrenage à flancs.* Le flanc étant un plan diamétral du cône, la dent conductrice sera une surface conique dont il faut déterminer la forme.

Soient S O, S O′ (fig. 180) les axes des deux cônes qui doivent tour-

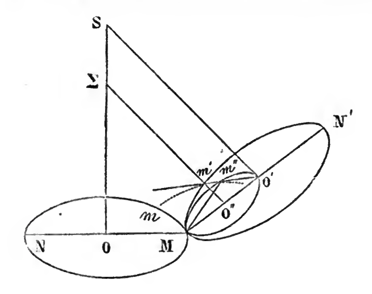


Fig. 180.

ner en se touchant toujours, suivant une arête S M. Soient M m N M m' N′ les circonférences des cercles provenant de l'intersection des deux cônes, par des plans menés perpendiculairement par le point M à leurs axes respectifs.

Que sur le rayon M O′ du cercle O′ comme diamètre, on décrive

une circonférence O″, et que par son centre O″ on élève une perpendiculaire sur son plan; cette perpendiculaire rencontrera l'axe OS en un point Σ.

Si l'on considère ce point Σ comme le sommet commun de deux cônes ayant pour bases les deux cercles O et O″, et qu'on fasse rouler le deuxième cône (ΣO″) sur le premier (ΣO).

Un point de la circonférence O″ décrira une courbe à double courbure mm'', appelée *épicycloïde sphérique*, parce qu'elle se trouve sur la sphère sur laquelle se meut le cercle O″ lui-même, sphère ayant son centre en Σ.

Que par cette épicycloïde on fasse passer un cône qui ait le point S pour sommet; ce cône sera la surface enveloppe d'un plan diamétral du cône SO′, et devra par conséquent être pris pour la surface des dents du cône SO. Ce résultat paraît évident d'après la similitude de la construction employée avec celle usitée pour les engrenages cylindriques; nous allons prouver au reste que toutes les conditions du problème sont satisfaites.

Soit mm'' l'arc d'épicycloïde sphérique décrit par le point m'' du cercle O″, à partir du moment où il toucherait le cercle O en m, de telle sorte que l'on ait arc Mm'' = arc Mm.

Prenons sur le cercle O′ l'arc Mm' = arc Mm, je dis que le plan $SO'm'$ qui passe par le point m'', est tangent en ce point à l'épicycloïde, d'où il suivra qu'il est tangent au cône qui a le point S pour sommet, et qui passe par l'épicycloïde.

En effet la droite Mm'', passant par le centre de rotation instantanée M, est normale à l'épicycloïde en m''. La droite $O'm''$ est perpendiculaire sur la droite Mm'', car l'angle $Mm''O'$ de ces deux droites est inscrit dans la demi-circonférence du cercle O″.

La droite O′S fait un angle droit avec la droite Mm'', puisqu'elle est perpendiculaire au plan du cercle O″.

Donc le plan $SO'm''$ passe par deux droites SO′ et $O'm''$ perpendiculaires à la droite Mm'', donc il est perpendiculaire à cette droite; or cette droite est une normale à l'épicycloïde.

Donc le plan $SO'm''$ est tangent à l'épicycloïde, et par suite à la surface conique, qui a son sommet en S et qui s'appuie sur l'épicycloïde.

Il suit de là que si cette surface que je désigne par SE, est la dent du cône SO, cette dent poussera le plan diamétral S′O′ m' du cône SO′, et le fera tourner autour de l'axe SO′.

Il reste à prouver que la rotation de ce plan diamétral et par conséquent du cône SO′, est proportionnelle à la rotation du cône SO.

Cela résulte de ce que l'arc M m' déterminé par la droite O′ m'' sur la circonférence O est égal à l'arc Mm.

En effet la circonférence O″ ayant pour diamètre le rayon MO′ de la circonférence O′, on a, comme nous l'avons déjà vu dans l'engrenage à flancs, arc Mm' = arc Mm''. Donc arc Mm' = arc Mm. Or les rotations des deux cônes sont mesurées respectivement par $\frac{\text{arc M}m}{\text{R}}$ et $\frac{\text{arc M}m'}{\text{R}'}$. Elles sont en raison inverse des rayons R et R′ des deux cercles O et O′, et conséquemment en raison inverse des sinus des angles au sommet des deux cônes.

En effet le cône SE qui forme la dent du cône SO, touche le plan diamétral SO′m'', c'est-à-dire le flanc du cône SO′, suivant l'arête Sm''. Nous avons vu que la droite Mm'' est perpendiculaire au plan SO′m''. Il s'ensuit que le plan Sm''M est le plan normal commun au cône SE et au plan diamétral SO′m''.

Donc le plan normal commun aux deux dents en contact, passe par l'arête de contact SM des deux cônes SO, SO′.

192. *Engrenage conique à développantes.* En transportant au cas qui nous occupe les raisonnements qui nous ont conduit à l'emploi des développantes pour le profil des engrenages cylindriques, on construira dans les mêmes conditions un engrenage conique à développantes.

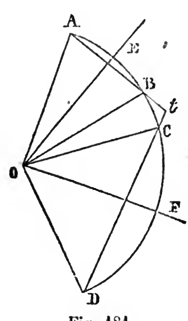


Fig. 181.

Étant donné l'angle de deux axes, OE, OF (fig. 181) se rencontrant au point O, imaginons autour de chacun d'eux une surface conique dont le sommet soit au point O et la base un petit cercle d'une sphère ayant ce même point pour centre; ces deux cônes seront re-

présentés sur la figure par les triangles isocèles AOB, COD; prenons ces bases en raison inverse des vitesses ω et ω', de manière à ce qu'elles satisfassent à la condition $R\omega = R'\omega'$.

La communication du mouvement serait évidemment établie dans les conditions voulues, en supposant le frottement suffisant, par un grand cercle de la sphère tangent aux deux bases, renfermé dans un plan tangent aux deux cônes.

Si maintenant on suppose que ce grand cercle s'enroule successivement sur chacun des cercles des bases des deux cônes, un point quelconque de ce grand cercle décrira sur la sphère deux courbes à double courbure dites *développantes sphériques*. Ces courbes, considérées comme dents sans épaisseur, seront propres à transmettre le mouvement aux deux cercles comme par enroulement et déroulement d'un grand cercle. Pour donner de l'épaisseur à ces dents, il suffit d'imaginer qu'un rayon de la sphère parcourt leur courbure et de prendre la longueur que l'on voudra de la surface conique ainsi engendrée. Le développement de ces surfaces a lieu en même temps que celui de leurs traces sur la sphère. Elles conviennent donc à la reproduction du mouvement pendant lequel elles sont engendrées, et la pression s'exerce normalement aux surfaces de contact et toujours à la même distance de l'axe; en un mot, l'engrenage jouit de toutes les mêmes propriétés que l'engrenage cylindrique à développantes.

193. *Construction pratique des engrenages coniques*. D'après ce qui précède, toutes les lignes qui entrent dans les engrenages coniques étant définies, ce n'est plus qu'une application des principes de la géométrie descriptive d'en déduire tous les panneaux et les tracés nécessaires pour la construction. Mais il est inutile d'entrer dans des détails étendus à cet égard, vu que, dans la pratique, on a adopté une méthode simple et suffisamment exacte. Nous ne parlerons en l'exposant que de l'engrenage à flancs, mais tout ce que nous dirons peut s'appliquer également aux autres engrenages.

Nous avons décrit l'épicycloïde sphérique par laquelle passe la surface conique qui doit former les dents de la roue O. Dans la pratique, ce n'est pas par cette courbe même qu'on termine cette surface conique, car ses arêtes seraient d'inégale longueur (puisque

le centre du cône qui décrit l'épicycloïde n'est pas au point de rencontre des deux axes ; comme cela a lieu pour l'engrenage à développantes, la solution approchée que nous allons exposer est plus exacte dans ce cas). On termine cette surface conique par la courbe qui résulte de son intersection avec un deuxième cône ayant son sommet S_1 sur l'axe OS (fig. 182) et passant par le cercle O, le

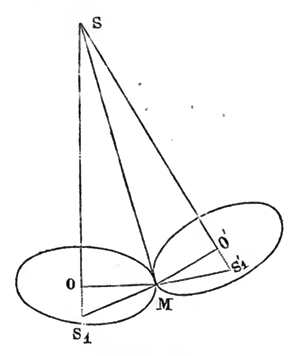


Fig. 182.

point S_1 étant celui de la rencontre de l'axe SO avec la perpendiculaire à l'arête SM au point M. Pareillement pour le cône SO'.

Les deux cônes (S_1) (S'_1) ont une arête commune, la droite $S_1MS'_1$ et un plan tangent commun suivant cette droite. Ils coupent respectivement les deux surfaces qui forment les dents des deux roues que j'appelle $(S_1 E)$ $(S'_1 E')$. Si on détermine les deux courbes d'intersection et qu'on développe les deux cônes S_1 S'_1 sur leur plan tangent commun, passant par $S_1MS'_1$ les courbes d'intersection en question se développeront sur ce plan, et on obtiendra, en les relevant, les panneaux nécessaires pour la construction exacte des cônes (SE), (SE').

194. Ainsi que nous l'avons déjà dit, on remplace cette construction par une méthode plus simple qui donne une approximation suffisante.

Dans le développement du cône S_1 la circonférence O (fig. 183) deviendra un arc de cercle de même longueur que cette circonférence. La courbe provenant de l'intersection du cône S_1 par le cône épicycloïdal S E, si on la considère dans une faible étendue, sera dans le plan tangent au cône suivant l'arête S_1 M.

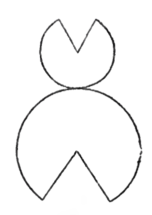


Fig. 183.

Pareillement le cône (S'_1) développé donnera un arc de cercle égal à la circonférence O'; la courbe provenant de l'intersection de ce cône (S'_1) par le cône (S E') qui forme la dent de la roue O', dans une petite longueur sera dans le même plan; il s'en suit que le tracé des parties qui traversent successivement la ligne de contact, doit se rapprocher extrêmement de celui de profils de dents qui appartiendraient à un engrenage plan construit sur ces deux arcs comme cercles primitifs.

C'est cet engrenage plan que l'on trace et applique ensuite sur les deux cônes (S_1) (S'_1) pour former l'engrenage conique, dont le tracé se réduit ainsi à celui d'un engrenage plan sur les surfaces développées que la flexibilité du papier permet d'enrouler ensuite sur les cônes; enfin, pour achever la construction, il suffit de faire passer par la courbe tracée les arêtes se dirigeant vers le sommet du cône.

195. *Frottement dans les engrenages coniques.* Dans les engrenages coniques exécutés avec soin, on a toujours l'attention de faire les dents, et par suite le pas aussi petit que possible, de sorte que le mouvement et le glissement des dents l'une sur l'autre ont sensiblement lieu comme s'ils se passaient dans le plan tangent aux deux surfaces coniques et normalement à la longueur des dents.

Il suit de là qu'en conservant les mêmes notations que pour les engrenages plans, mais en les appliquant au développement des surfaces coniques, on aura encore pour l'effort moyen, qui, exercé dans le plan tangent commun et perpendiculairement à la ligne des centres des cercles développés, produirait la même quantité de travail que le frottement de l'engrenage :

$$fQ\left(\frac{R+R'}{RR'}\right)\frac{a}{2} \text{ ou } fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{a}{2}.$$

R et R' sont dans cette formule les rayons des cercles développés, Q l'effort ou la résistance qui s'oppose dans le plan tangent au mouvement de la roue conduite et a le pas de l'engrenage.

Si l'on voulait avoir la valeur du frottement exprimé en éléments de l'engrenage conique, appelant ρ et ρ' les rayons des cercles de base, α et α' les demi-angles au sommet des deux cônes S_1, S'_1, on aura : $R\cos\alpha=\rho$, $R'\cos.\alpha'=\rho'$, et $\alpha+\alpha'=180°-\delta$, δ étant l'angle des plans des deux roues perpendiculaires aux deux axes. L'expression ci-dessus deviendra donc :

$$fQ\left(\frac{\cos.\alpha}{\rho}+\frac{\cos.\alpha'}{\rho'}\right)\frac{a}{2}.$$

L'expression entre parenthèses revient a :

$$\sqrt{\left(\frac{\cos.\alpha}{\rho}+\frac{\cos.\alpha'}{\rho'}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}+\frac{2\cos.\alpha\cos\alpha'}{\rho\rho'}-\frac{\sin.^2\alpha}{\rho}-\frac{\sin.^2\alpha'}{\rho'}},$$

et comme $\cos.180°-\delta=-\cos.\delta=\cos.\alpha\cos.\alpha'-\sin.\alpha\sin.\alpha'$, que l étant la génératrice du contact, $l\sin.\alpha=\rho$, $l\sin.\alpha'=\rho'$ et que par suite $\frac{\sin.\alpha}{\rho}-\frac{\sin.\alpha'}{\rho'}=0$, l'expression ci-dessus revient à :

$$\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}-\frac{2\cos.\delta}{\rho\rho'}};$$

donc enfin, comme $\rho:\rho'::n:n'$ et $a=\frac{2\pi\rho}{n}$, l'expression de l'effort moyen qui produirait le même travail que le frottement, en faisant entrer dans son expression le nombre de dents, peut se mettre sous la forme :

$$fQ\pi\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos.\delta}{nn'}}.$$

Le travail dû à cette force pendant que la roue décrit un arc s, sera :

$$T_f = f Q \pi s \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{n n'}}.$$

Or, $Q s$ est le travail dû à la resistance Q pendant le mouvement de la roue; représentons-le par T_r, on a enfin :

$$T_f = T_r f \pi \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{n n'}}.$$

196. Nous ne traiterons pas ici des communications de mouvement à l'aide d'intermédiaires entre deux axes qui se rencontrent; les solutions étant sensiblement les mêmes dans le cas actuel et dans le suivant, nous les traiterons en même temps.

3° AXES NE SE RENCONTRANT PAS, NON SITUÉS DANS UN MÊME PLAN.

Organes agissant par contact immédiat et à frottement de roulement.

197. Si l'on cherche dans ce cas comme dans les précédents, les surfaces qui pourraient servir à faire mouvoir un des axes par le mouvement de rotation de l'autre axe, de telle sorte que le rapport des vitesses soit constant et qu'il ne se produise pas de glissement, mais seulement un frottement de roulement; on trouvera que le problème sera résolu par l'emploi de deux hyperboloïdes de révolution engendrés par une même droite tournant successivement autour de chacun des axes. On sait que cette surface est engendrée par une droite qui ne rencontre pas un axe autour duquel elle tourne, et auquel elle n'est pas parallèle. Deux surfaces de cette

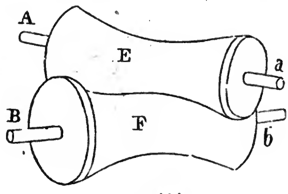


Fig. 184.

nature E, F (fig. 184) tournant autour de leurs axes A a, B b, se conduiront par simple contact; celui-ci a toujours lieu le long d'une

génératrice commune aux deux surfaces; le changement de contact correspond au déplacement de la génératrice commune lorsque chacun des axes décrit des rotations dans un rapport donné. Tout ceci va paraître très clair en cherchant à construire le système dont il s'agit.

198. Soient AB, CD deux axes de rotation (fig. 185), ab, cd leurs projections sur un plan parallèle à tous deux; gk leur perpendiculaire commune (leur plus courte distance) projetée en M; EF

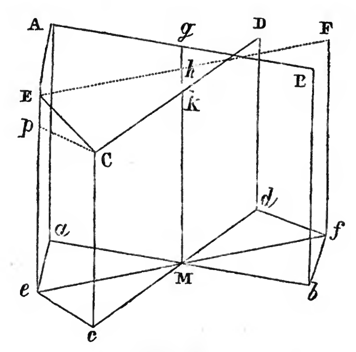


Fig. 185.

une ligne qui coupe gk en h, est parallèle au plan sur lequel elle est projetée suivant ef et passe par le point M. La ligne EF en tournant autour de AB engendrera un hyperboloïde, et en tournant autour de CD un autre hyperboloïde; EF sera par suite une ligne commune à ces deux surfaces.

D'un point quelconque E de cette ligne, abaissons les perpendiculaires EA, EC sur AB et sur CD, les lignes AE, EC, qui se projeteront suivant ae, ce, seront les rayons de deux cercles des deux hyperboloïdes ayant un point E commun.

Menant Cp parallèle à ce, on aura E$p = hk$ et C$p = ce$,

$$\text{d'où } \overline{EC}^2 = \overline{Ep}^2 + \overline{Cp}^2 = \overline{hk}^2 + \overline{ce}^2.$$

On trouverait de même : $AE^2 = gh^2 + ae^2$; si donc on a tracé la projection ef de telle sorte que l'on ait $\frac{ce}{ae} = \frac{hk}{gh}$, on aura

encore d'après les égalités ci-dessus $\frac{EC}{EA} = \frac{hk}{gh}$, par conséquent les distances de tout point de la ligne EF aux deux axes sont dans un rapport constant, et par suite, pour une rotation de chacun d'eux en rapport inverse des rayons, des longueurs égales des deux circonférences dont ces distances sont les rayons, passeront à tous les points communs. Il n'y aura donc que changement de génératrice commune, et la vitesse angulaire $= \frac{r}{R}$, r et R correspondant aux rayons des cercles de gorge des hyperboloïdes. On pourra donc facilement déterminer la projection ef et par suite la position d'une ligne EF pour un rapport de vitesses donné; et les deux axes qui porteront les deux hyperboloïdes qu'elle engendre pourront se mouvoir par contact dans ce rapport de vitesses.

Mais tandis que pour le cas des cônes, les circonférences de chaque paire de cercles qui se correspondent, bien que n'étant pas dans le même plan, se meut de telle sorte que les rayons qui passent par le point de contact soient perpendiculaires à la ligne d'intersection des deux plans qui renferment les cercles, et que par suite les tangentes au point de contact coïncident avec cette ligne, il n'en est plus ainsi dans le cas des hyperboloïdes.

Les cercles dont les rayons sont CE, AE se trouvent dans des plans dont l'intersection est la ligne Ee; les tangentes à ces cercles au point E ne coïncident nullement avec cette ligne ni avec aucune autre, elles sont tout à fait distinctes; il n'y a plus en réalité roulement, mais rencontre de points successifs des cercles, surtout si la distance gk est grande. Si elle est petite, les hyperboloïdes se rapprochent d'une paire de cônes dont le sommet commun serait en h.

199. Remarquons que pour le cas des axes qui ne sont pas parallèles et ne se rencontrent pas, on peut employer le système des cônes de roulement, à l'aide d'un cône intermédiaire.

Soient Aa, Bb deux axes (fig. 186); prenez une ligne convenablement disposée qui rencontre les deux axes en C et en D, et servez-vous-en comme d'un troisième axe jouant le même rôle que les deux premiers.

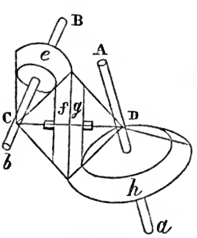


Fig. 186.

Une paire de cônes de roulement *e*, *f*, ayant leur sommet en C, et une autre paire *g*, *h*, ayant leur sommet en D, se mèneront par simple roulement, et finalement la rotation de B*b* sera communiquée à A*a* par simple roulement.

Soient A, A_1, *a* les vitesses angulaires respectives des axes, B*b*, CD, A*a*, et R, R_1, *r* les rayons des bases de ces cônes, on aura :

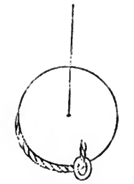
$$\frac{A}{A_1} = \frac{R_1}{R} \text{ et } \frac{A_1}{a} = \frac{r}{R_1}, \text{ d'où } \frac{A}{a} = \frac{r}{R},$$

exactement comme si les cônes *e* et *h* étaient en contact immédiat.

200. D'après ce qui précède, la transmission du mouvement entre deux axes qui ne se rencontrent pas, et ne sont pas parallèles, peut théoriquement avoir lieu comme dans les premiers cas précédemment étudiés et la solution théorique être appliquée, si l'adhérence au contact suffisait pour surmonter la résistance à vaincre. Si elle ne peut suffire, on peut encore (au moins théoriquement, car les difficultés du tracé de ces engrenages les rendent peu admissibles dans la pratique) construire des engrenages à frottement de roulement dont les dents ne se touchent qu'en un point, d'après les principes déjà exposés pour d'autres positions des axes de rotation. Il faut pour cela enrouler sur les deux hyperboloïdes une même courbe par la rotation de ces surfaces dans le rapport de vitesse voulu, puis habiller ces courbes de manière qu'elles se trouvent sur des surfaces se touchant par ces courbes, de telle sorte que celles-ci ne puissent échapper.

Prenant pour la ligne à enrouler une ligne droite, la courbe d'enroulement se rapproche de celles étudiées précédemment pour les autres cas. M. Olivier en les réunissant par un mode de génération commun, les a classé en développantes plane, cylindrique, cônique ou hyperboloïdique, suivant qu'elles sont tracées sur un plan, un cylindre, un cône ou un hyperboloïde de révolution.

201. Soit A un axe vertical (fig. 187), P un plan perpendiculaire à cet axe le coupant en un point o, traçons dans le plan P un cercle de rayon ρ ayant son centre en o.


Fig. 187.

Soit F un fil enroulé sur ce cercle, et au point où le fil se sépare du cercle, imaginons un anneau glissant sur ce cercle et qui permet à l'extrémité libre du fil de prendre diverses directions. Si l'on donne un mouvement de rotation autour de l'axe :

1° La partie libre du fil restant dans le plan P et tangente au cercle, un point de ce fil tracera une développante du cercle.

2° La partie libre du fil restant dans le plan P et coupant le rayon qui passe par le point d'attache sous un angle constant, un point du fil tracera une développante allongée du cercle qui a pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre o, sur cette droite.

3° La partie libre du fil étant tendue le long de la génératrice d'un cône droit passant par le cercle, l'extrémité décrira une spirale dont la projection sur le plan P sera une spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$).

4° La partie libre du fil étant tendue le long de la génératrice d'un cylindre droit passant par le cercle, décrira une hélice cylindrique.

5° Enfin si la surface sur laquelle se meut le fil est engendrée par la révolution d'une ligne faisant avec la ligne A qu'elle ne rencontre pas un angle δ, la surface sera une hyperboloïde de révolution, et la ligne tracée par un point du fil appliqué le long d'une génératrice rectiligne, une *développante hyperboloïdique circulaire*.

Il est évident que dans le cas des hyperboloïdes cette ligne ne pourrait plus être remplacée par une droite tracée dans un même plan tangent commun aux deux surfaces (puisque pour une génératrice commune les deux plans tangents sont distincts), le tracé des dents offrira par suite des difficultés, que l'on n'abordera guère dans la pratique, surtout lorsque la solution indirecte par une roue

intermédiaire permet une facile solution du problème à l'aide des engrenages coniques. Toujours est-il que la solution est théoriquement possible dans ce cas comme dans les précédents, par l'adoption de formes convenables pour des dents qui peuvent se conduire en ne se touchant en chaque instant qu'en un point et sans frottement de glissement.

Organes agissant par contact immédiat et avec frottement de glissement.

202. Ce que nous venons de dire pour les engrenages à frottement de roulement est également vrai des engrenages à frottement de glissement. Jamais dans la pratique on n'emploie la solution directe, c'est-à-dire qu'on joint deux points des axes par une ligne qui devient un axe auxiliaire de rotation, qui reçoit le mouvement du premier axe à l'aide d'une roue conique et le transmet de la même manière au second.

Il est clair cependant que la solution théorique est possible et que le premier hyperboloïde portant une dent d'une certaine forme, si le deuxième est muni d'une dent qui soit l'enveloppe de toutes les positions de la première, le mouvement aura lieu comme si les deux hyperboloïdes se mouvaient ainsi que nous venons de le dire, c'est-à-dire que les vitesses de rotation des deux axes seraient dans le rapport voulu. Il n'y a nul intérêt à envisager ainsi le problème dans toute sa complication. M. Olivier a donné la solution de la question pour un système qui jouit de propriétés particulières importantes fondées sur celles des développantes. C'est le seul cas que nous examinerons et qui, du reste, nous montrera clairement comment il faudrait opérer dans le cas général.

Dans ce système, les dents de l'une des roues sont à développantes et ne diffèrent pas de celles d'un engrenage cylindrique, celles de l'autre roue sont formées d'une surface héliçoïde développable, et le contact a toujours lieu suivant une ligne droite.

203. Cherchons à donner idée du principe fondamental de la construction de ce système et à exposer les données desquelles, à l'aide des procédés de la géométrie descriptive, on peut déduire les tracés nécessaires à l'exécution.

De la propriété de l'engrenage plan à développantes, que le contact a toujours lieu sur la normale commune, qui est la tangente commune aux cercles qui portent les dents, il résulte que si on fait tourner une des roues autour de cette tangente, les deux engrenages mus avec la vitesse voulue se toucheront toujours par un point situé sur cette tangente commune (1). La première roue restant la même, cherchons les modifications qu'il faudrait faire subir aux dents de la seconde roue, quelle surface devrait être engendrée par des génératrices passant par une section faite au milieu de l'engrenage à développantes fournissant déjà un point de contact, pour que le contact eût lieu suivant une ligne droite.

Traçons l'engrenage plan comme à l'ordinaire, et dans un plan MM' (fig. 188) perpendiculaire au premier, traçons ON, trace du plan de la seconde roue après qu'elle a effectué une rotation autour de la tangente commune. Soient O, o', o'', les projections des points de contact successifs m, m', m'', ils se projetteront sur ON, en des points p, p', p'', obtenus en décrivant des arcs de cercle du point O comme centre avec les rayons Oo', Oo''. Si donc on prenait pour génératrices des surfaces des dents des deux roues les cordes p' o', p'' o'', le contact aurait évidemment lieu suivant ces lignes qui passent par les points des deux roues qui viennent successivement en contact. Ces lignes formant avec le plan de chaque roue un angle égal à la moitié du supplément de l'angle des deux plans, elles engendreraient deux surfaces développables héliçoïdales, puisque l'incli-

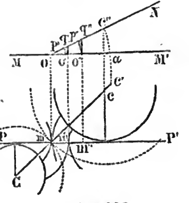


Fig. 188.

(1) M. Olivier a encore fondé sur cette remarque la construction d'engrenages à développantes fort curieux. Puisque l'on peut faire tourner une des roues autour de la tangente commune, l'engrenage peut être oscillant, c'est-à-dire qu'on peut donner à une des roues deux mouvements de rotation, l'une autour de son axe, l'autre autour de la droite des contacts. Les contacts n'ayant lieu que par un point, les roues doivent se réduire à des profils sans épaisseur, ou les dents de la roue oscillante être terminées par une surface-canal.

naison de ces arêtes est constante, et que comme elles sont situées lors du contact dans le plan vertical P P′, que leurs projections horizontales sont les normales aux développantes, leurs arêtes de rebroussement sont situées sur les surfaces des cylindres.

Mais, ainsi que nous l'avons dit, ce ne sont pas deux surfaces héliçoïdales qu'on emploie pour former les dents, on trouve bien plus avantageux de conserver à la première roue à développantes sa forme cylindrique et par suite d'une construction facile.

Dans ce cas, les projections des arêtes passant au point de contact deviennent $o' q'$, $o'' q''$. Les points p', p'', appartenant à la seconde roue, ne peuvent plus alors venir en contact avec les génératrices des dents cylindriques de la première. Mais si on recule la roue C dans le prolongement de son rayon en C′ (déplacement qui, dans le engrenages à développantes, n'influe en rien, comme on le sait, sur la forme des dents ni sur le point de contact toujours placé sur le point de rencontre du profil de la dent de la roue fixe avec la tangente commune), et qu'on détermine ce point C′ en projetant le centre C sur MM′, prolongeant jusqu'en C″ et rabattant par un arc de cercle en C′; on voit facilement que les points q', q'', deviennent alors les projections des points de contact p', p'', de la seconde roue, et que le contact des dents aura lieu suivant ces arêtes, qui sont des droites ayant deux points communs o et q sur les deux roues, si on les prend pour génératrices des dents de la surface héliçoïdale de la seconde roue. Ces génératrices seront des droites inclinées sur le plan de cette roue d'un angle égal au complément de l'angle des deux plans, et formeront une surface héliçoïdale dont tous les éléments sont déterminés.

204. Pour rendre ceci plus clair, proposons-nous de construire *à priori* l'engrenage dont il s'agit.

Après avoir partagé la plus courte distance des deux axes qui ne se rencontrent pas, en raison inverse des vitesses à obtenir, traçons avec ces longueurs ou des longueurs proportionnelles, comme rayons, deux cercles, la question se réduit à transmettre le mouvement du premier au second, ou mieux aux cylindres ayant ces cercles pour base et des génératrices parallèles aux axes, avec la condition que les vitesses angulaires soient dans le rapport voulu.

Nous donnons aux dents de la roue menante pour profils des développantes de cercle ; les dents de la roue menée seront des portions de la surface développable formée par les tangentes à une certaine hélice tracée sur la surface cylindrique appartenant à cette deuxième roue.

Soient les deux cylindres construits comme nous venons de le dire, c'est-à-dire ainsi (fig. 190) : construire la plus courte distance entre les deux axes, et la diviser en deux parties OK, O′K inversement proportionnelles aux vitesses des axes ; prendre ces parties OK, O′K pour rayons des deux cylindres primitifs. Les deux génératrices des deux cylindres parallèles aux deux axes passant au point K, détermineront un plan tangent aux deux cylindres. En effet, ce plan comprendra une génératrice de chacun des cylindres, chacune perpendiculaire aux parties de la plus courte distance qui sont les rayons des cercles de base des cylindres et qui seront par suite perpendiculaires à ce plan. Plaçons, pour simplifier, l'axe du premier cylindre vertical, et l'axe du deuxième incliné à l'horizon.

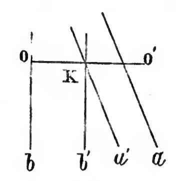


Fig. 189.

Dans le plan P menons une droite verticale, enroulons-la sur le deuxième cylindre de manière à former une hélice. Si l'on fait tourner ce cylindre autour de son axe, les différents points de l'hélice viendront se placer dans le plan vertical P, et les tangentes à l'hélice viendront aussi successivement se placer dans ce plan ; elles auront alors une direction verticale, car elles feront toutes le même angle avec les génératrices du cylindre, et cet angle est précisément égal à celui que la verticale que nous avons enroulée sur le cylindre fait avec son axe.

Toutes ces tangentes forment une surface développable qui a pour arête de rebroussement l'hélice.

Tout plan tangent à cette surface développable passe, comme on sait, par deux arêtes consécutives, c'est-à-dire par deux tangentes à l'hélice infiniment voisines ; c'est donc le plan osculateur de l'hélice au point commun aux deux tangentes (renfermant deux

éléments de la courbe). Ce plan passe par la normale abaissée de ce point de l'hélice sur l'axe du cylindre, ce que nous démontrerons plus loin. Il s'ensuit que ce plan est perpendiculaire au plan tangent au cylindre mené par ce point de l'hélice (1).

D'après cela, le plan osculateur à l'hélice en un point m, situé dans le plan vertical P, est normal à ce plan, puisqu'il passe par la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe du cylindre, laquelle est perpendiculaire au plan P tangent au cylindre. D'une autre part, ce plan osculateur passe par la tangente à l'hélice au point m, laquelle est verticale; ce plan est donc le plan vertical normal au plan P. Or, ce plan osculateur est le plan tangent à la surface héliçoïdale. Donc, dans le mouvement du cylindre autour de son axe, tous les plans tangents à la surface développable héliçoïdale viennent se placer perpendiculairement au plan vertical P, qu'ils coupent suivant des droites verticales.

Maintenant, supposons que le premier cylindre soit armé d'une dent dont le profil soit une développante de cercle qui lui sert de base, cette dent sera elle-même un cylindre vertical; ce cylindre sera toujours normal au plan vertical P, parce qu'une développante de cercle est toujours normale à toute tangente au cercle. Donc, ce cylindre en tournant sera toujours tangent à la surface développable héliçoïdale, qu'il touchera suivant une de ses génératrices.

Ce cylindre poussera donc la surface héliçoïdale en s'appuyant sur elle dans toute l'étendue de sa génératrice, qui, au moment du contact, est dans une position verticale. Cette pression fera tourner le cylindre autour de son axe.

Après un mouvement infiniment petit, ce sera une autre arête de la surface héliçoïdale qui sera dans une position verticale et que le cylindre à base de développantes poussera.

Quand ce cylindre, qui forme une dent du premier cylindre, aura cessé de pousser la surface héliçoïdale qui forme une dent du deuxième cylindre, deux autres dents semblables commenceront à être en prise. De la sorte, la transmission du mouvement se

(1) Cette démonstration est empruntée au cours de machines de l'École Polytechnique, professé par M. Chasles (feuilles lithographiées).

fera d'une manière continue, comme dans les engrenages coniques.

205. Nous avons dit que le plan osculateur en un point d'une hélice tracée sur un cylindre circulaire passe par la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe du cylindre. Voici la démonstration de cette proposition.

Le plan osculateur passe par deux tangentes infiniment voisines mt, mt' (fig. 190). Que l'on suppose que par le point m on ait mené des droites parallèles à toutes les tangentes à l'hélice, ces droites formeront un cône de révolution autour de l'arête mk du cylindre. Le plan des deux tangentes mt, mt' sera tangent à ce cône. Conséquemment, il sera perpendiculaire au plan qui contient la tangente mt et l'arête mk, car celui-ci sera le plan diamétral du cône; or ce plan est tangent au cylindre. Donc le plan des deux tangentes mt, mt', c'est-à-dire le plan osculateur de l'hélice, est normal au plan tangent au cylindre. Donc il passe par la normale à ce plan tangent, c'est-à-dire par la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe du cylindre.

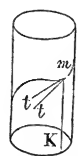


Fig. 190.

206. La rotation du deuxième cylindre autour de son axe sera toujours dans un rapport constant avec la rotation du premier cylindre.

En effet (fig. 191), soit LL la tangente commune aux bases des deux cylindres. Soient n, n' les points où la développante du cercle

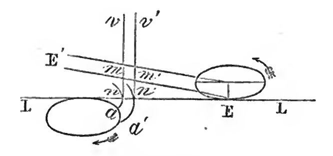


Fig. 191.

qui forme la dent du premier cylindre rencontre cette droite LL, dans deux positions successives ; nn' égal à l'arc aa', est propor-

tionnel à la rotation du premier cylindre. EE′ étant l'arête de contact du deuxième cylindre et du plan P, est rencontrée en m et m' par les perpendiculaires élevées n et n', Em et Em', mesurent les distances de deux points de l'hélice, qui dans la rotation viennent se placer sur la droite EE′, à la base circulaire du cylindre. Le segment mm', différence de ces distances, est proportionnel à la rotation du second cylindre; mais le segment nn' est proportionnel à mm'. Nous avons dit que ce dernier était proportionnel à la rotation du premier cylindre. Donc les rotations des deux cylindres sont entre elles dans un rapport constant.

207. On peut, dans ce système d'engrenages, construire des engrenages intérieurs et extérieurs. Ni les uns ni les autres ne sont évidemment à retour; cela résulte clairement de la forme des dents héliçoïdales. Au reste, cette surface héliçoïdale ayant deux nappes formées par l'enroulement d'une droite autour d'un cylindre sous un angle constant (à droite et à gauche), il sera facile de construire un engrenage agissant dans un sens celui agissant en sens inverse étant déterminé, et de les assembler avec un même axe pour en obtenir le mouvement dans les deux sens.

La savante solution du problème des engrenages entre deux axes qui ne sont pas dans un même plan que nous venons d'expliquer, est due à M. Olivier. Elle n'a pas encore reçu d'applications pratiques importantes; on doit l'attribuer surtout à la difficulté de tracé, et aussi au frottement considérable qu'engendrerait, sur les collets des tourillons et sur les dents, l'inclinaison de la dent héliçoïdale.

208. *Frottement.* On voit facilement que le travail du frottement ne sera plus calculable entièrement, comme pour les engrenages coniques; le chemin parcouru par le frottement sera différent. En effet, le point de contact se meut sur une surface héliçoïdale dont les génératrices font un angle $90^\circ - \delta$ (δ étant l'angle des plans des deux roues) avec le plan perpendiculaire au second axe. Le contact ne demeure plus sur une même tangente commune comme dans les engrenages coniques, il se déplace en outre sur un plan incliné qui est celui de la surface héliçoïdale dont les éléments font un angle δ avec les génératrices du premier cy-

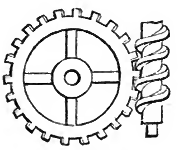
lindre. Le contact parcourt la face inclinée au lieu de la base d'un petit plan incliné; ou mm', fig. 191, si on compare ce qui se passe dans cet engrenage à ce qui a lieu dans un engrenage conique, où il parcourrait la ligne nn'; il existe donc la relation entre la valeur du chemin parcouru l par le contact et la rotation a, $l \sin. \delta = a$, cette longueur pour un tour devient $\frac{2\pi R}{\sin. \delta}$. Le travail du frottement sera sensiblement celui des engrenages coniques multiplié par $\frac{1}{\sin. \delta}$, ou :

$$T_f = \left(\pi f T_r \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2 \cos. \delta}{nn'}}\right)\frac{1}{\sin. \delta},$$

$\sin. \delta$ étant toujours plus petit que 1, cette valeur du frottement est toujours plus grande que pour les engrenages coniques; pour $\delta = 30^o$ $\sin. \delta = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sin. \delta} = 2$.

AXES A ANGLE DROIT.

209. *Vis sans fin.* Dans le cas particulier où les deux axes qui ne se rencontrent pas forment un angle droit ou peu différent d'un droit, l'organe fréquemment employé est celui représenté par la fig. 192, représentant une roue dentée dont les dents sont des développantes de cercle engrenant avec une vis à filets rectangulaires. Les dents de la roue et les plans inclinés de la surface héliçoïdale servent à transmettre le mouvement d'un axe à l'autre; en général c'est la vis qui conduit.


Fig. 192.

Je suppose que l'axe de la vis soit vertical, l'axe de la roue sera horizontal, et la roue, que nous supposerons un instant être un cercle ou disque sans épaisseur, sera dans un plan vertical passant par l'axe de la vis.

Ce plan coupe la surface inférieure de la vis (fig. 193) suivant plusieurs de ses génératrices, c'est-à-dire suivant des droites μm

$\mu' m' \ldots$, et le cylindre sur lequel sont les hélices extrêmes de la vis suivant une génératrice $m m'$.

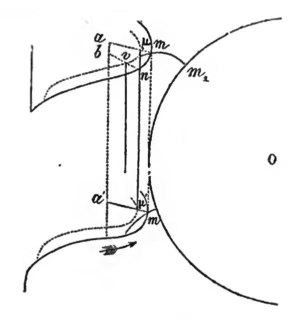


Fig. 193.

Regardons cette droite $m m'$ comme la directrice d'une crémaillère (système dont nous parlons plus loin), c'est-à-dire comme portant des flancs $m \mu$, $m' \mu' \ldots$ perpendiculaires à sa direction, et donnons à la roue des dents ayant pour profils des développantes de cercle.

Si l'on fait tourner la vis dans le sens indiqué par la flèche, ses génératrices telles que $b n$, inférieures à $a m$, viendront successivement se placer dans le plan de la roue, et se trouveront en contact avec sa dent $m m_1$; elles exerceront donc sur cette dent une pression de haut en bas, qui fera tourner la roue.

Quand la dent $m m_1$ cessera d'être en prise, d'autres dents fonctionneront; de sorte que le mouvement continu de la vis produira un mouvement continu de la roue.

Si le premier est régulier, le deuxième le sera aussi; car l'arc parcouru par un point m_1 de la roue sera égal au segment intercepté sur la verticale $m m'$ par deux positions de la roue $m m_1$. Ce segment sera la distance, estimée verticalement, entre deux génératrices $a m$, $b n$ de la vis; or cette distance est proportionnelle à la rotation de la vis; donc la rotation de la roue sera elle-même proportionnelle à la rotation de la vis, ou

$$\omega' : \omega :: h : 2\pi R,$$

h hauteur du pas de la vis R rayon de la roue; pour un tour de la vis ou $\omega' = 1$, la roue aura tourné de $\frac{2\pi R}{h}$ ou d'une division, car celle-ci est de longueur égale à celle du pas de la vis.

210. Nous avons supposé que la roue se réduisait à un simple cercle sans épaisseur; mais, dans la pratique, les dents devront avoir une certaine épaisseur, et leur face latérale, qui a pour base la développante du cercle de la roue, ne peut pas être normale au plan de la roue, à cause de l'inclinaison de la surface de la vis sous laquelle doit se loger la dent. Il faudra donner à cette face latérale une inclinaison semblable à celle de la surface de la vis lors du contact. De cette condition résulte, comme nous allons le voir, l'impossibilité de la réciprocité du système dans tous les cas de la pratique.

Supposons que la puissance soit une force P tangente à la circonférence du cylindre sur lequel est tracée l'hélice extrême, c'est-à-dire à la circonférence qui a am pour rayon; la résistance est une force Q qui s'exerce, suivant la génératrice du contact, en m de bas en haut. Si l'on fait abstraction du frottement, la relation entre la puissance et la résistance sera la même que sur le plan incliné, savoir $P = Q \text{ tang. } \alpha$, α étant l'angle que la tangente à l'hélice fait avec la direction de la force P.

211. Quel que soit l'angle α, on pourra toujours, en augmentant la force P, faire fonctionner le système. Car on peut considérer la dent de la roue comme une petite surface K (fig. 194) appliquée sur

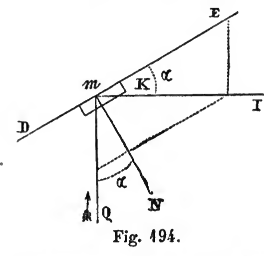


Fig. 194.

la surface de la vis et poussée verticalement de bas en haut, et la vis

comme un plan peu incliné qui ne peut avancer qu'en faisant descendre cette pièce K qui la presse; mais qu'avec une force suffisante, on fera toujours descendre.

Mais si l'on veut conduire la vis par la roue, il faudra que la force verticale Q qui presse la petite surface K sur la surface DE de la vis comme sur un plan incliné, soit capable de produire le glissement de cette surface sur ce plan malgré le frottement.

Or nous savons que la condition du glissement d'un corps sur un plan, c'est que la direction de la force qui doit le produire fasse avec la normale au plan un angle plus grand que celui du frottement. Sur la figure, l'angle que la verticale mQ fait avec la normale mN est égal à l'angle que la tangente à l'hélice, représentée par DE, fait avec l'horizontale mI.

Il faut donc, pour que l'engrenage soit réciproque, c'est-à-dire pour que la roue puisse conduire la vis, que l'inclinaison de l'hélice sur le plan horizontal soit plus grande que l'angle de frottement; ou en appelant f le cofficient de frottement que l'on ait tang. $\alpha > f$.

Généralement l'inclinaison α n'est pas considérable, à cause de la relation $P = Q$ tang. α qui permet de surmonter une résistance Q d'autant plus grande par une même puissance qu'on fait l'angle α plus petit. C'est pourquoi dans la plupart des engrenages à vis sans fin il n'y a pas réciprocité. Mais dans certaines machines qui n'ont pas de fortes résistances à vaincre, en prenant des inclinaisons de filet convenables il peut y avoir réciprocité, la roue peut conduire la vis.

Remarquons que deux roues à dents héliçoïdales, engendrées par des droites également inclinées sur les génératrices de deux cylindres primitifs, pourraient aussi conduire deux axes à angle droit; la génératrice commune devrait alors être inclinée d'un demi-angle droit. L'engrenage à vis sans fin n'est qu'un cas particulier de la solution générale donnée pour deux axes qui ne se rencontrent pas.

212. *Frottement dans l'engrenage de la vis sans fin.* La vis et la roue dentée présentant en coupe un système identique avec la crémaillère (voir plus loin), on peut prendre, comme dans ce

cas, pour effort moyen du frottement $fQ\,\frac{a}{2R} = \frac{f\pi Q}{n}$, puisque $a = \frac{2\pi R}{n} = h$ pas de la vis. Le chemin parcouru par ce frottement pour une division n'est plus a mais $l = \frac{a}{\sin.\alpha}$, α étant l'angle de l'hélice avec son axe. Le travail pour une division devient $fQ\,\frac{a}{n}\,\frac{1}{\sin.\alpha}$, et pour un tour, en remplaçant a par $2\pi R$, comme $Q \times 2\pi R = T_r$, égal à $f\pi T_r\,\frac{1}{\sin.\alpha}$, quantité dont la valeur est d'autant plus grande que α est moindre, $\frac{1}{\sin.\alpha}$ étant une quantité plus grande que 1 puisque sin. α est toujours plus petit que 1.

On voit combien ce système est peu propre à transmettre de grandes forces, et qu'il s'y produit un frottement qui occasionne une perte de travail considérable.

213. *Spirale.* Au lieu d'employer le filet d'une vis, on peut, pour transmettre le mouvement entre deux axes faisant un angle droit, engager les dents d'une roue dans une rainure tracée sur un plateau (fig. 195), et telle que $\rho = a\omega$ (ρ longueur du rayon vecteur, ω angle décrit) ; c'est la spirale d'Archimède qui s'obtient facilement dans les arts, comme nous le verrons. Les dents de la roue seront entraînées par les rainures dans le mouvement de rotation du plateau, et leur écartement sera déterminé par la condition que deux dents soient engagées en même temps dans la rainure ; le mouvement inverse ne saurait avoir lieu, car il ne se produirait qu'une pression sur l'axe de la spirale qui est situé dans le plan moyen de la roue.

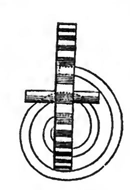


Fig. 195.

La largeur de la rainure doit être assez grande pour donner passage aux dents de la roue sous leurs diverses inclinaisons, en remarquant qu'il doit y avoir au moins deux dents en prise. En prenant cette précaution, le mouvement peut conserver une régularité

suffisante mais non absolue, car pour un même mouvement angulaire de la spirale, le mouvement de la roue dentée varie suivant la partie de la spirale où la dent de la roue est engagée ; mais la vitesse moyenne peut être suffisamment régulière pour la pratique, et en un tour du plateau une dent aura avancé de l'intervalle qui sépare deux rainures ou d'une division de la roue.

Les faces de la spirale sur lesquelles agissent les dents doivent appartenir à une surface engendrée par une droite reposant sur un point de la spirale, et passant par le centre de la roue quand ce point de la spirale passe dans le plan moyen de celle-ci. Elles appartiendront donc à une surface réglée dont la spirale sera la directrice, et dont les génératrices seront inclinées proportionnellement à la distance au centre du point de la spirale par lequel elles passent. En formant les dents de la roue de surfaces coniques convexes ayant aussi le centre de la roue pour sommet, le contact de ces dents et des rainures pourra avoir lieu suivant une droite.

Il résulte clairement de ce qui précède que l'axe de la roue ne peut être rencontré par celui de la spirale, car le mouvement ne pourrait alors se produire, les dents de la roue étant en prise, agissant inversement des deux côtés de l'axe de la spirale.

Ce système, bien que d'une autre nature que la vis sans fin, en provient en ce que la spirale d'Archimède a quelque analogie avec l'hélice; elle est engendrée dans un plan comme celle-ci, relativement aux génératrices d'un cylindre, en ce que l'outil qui la trace avance d'une quantité constante pour une même rotation.

214. *Emploi de la vis sans fin et de la spirale.* La vis sans fin et la spirale jouissent toutes deux de la propriété de faire avancer d'une division seulement les dents de la roue pour un tour entier de la vis ou du plateau. Cette propriété les rend très propres à être utilisées dans les compteurs dont la construction repose sur l'emploi de systèmes qui permettent d'obtenir un très petit nombre de tours d'un axe pour un nombre très grand de tours d'un autre axe.

Nous devons noter ici une disposition ingénieuse adoptée par M. Saladin de Mulhouse pour simplifier la construction de ces

compteurs, et qui consiste à employer une roue servant à la fois comme roue dentée d'un système et comme vis sans fin, ou comme plateau portant une spirale d'un autre système.

Dans le premier cas, il donne à la roue dentée une certaine épaisseur, puis entaille les dents dans le sens de l'épaisseur suivant des rainures héliçoïdales, ce qui lui permet d'agir en un point comme roue dentée et en un autre comme vis sans fin. Dans le second, c'est le plat de la roue dentée qui est plan et porte la spirale.

On voit qu'une roue de 50 dents, par exemple, avançant d'une division pour un tour d'un arbre portant une vis sans fin, ou faisant tour pour 50 du premier, agira de même sur la roue dentée d'un troisième axe. Si cette roue porte encore 50 dents, son axe ne tournera que d'un tour pour 50 tours de la première roue dentée ou de de $50 \times 50 = 2500$ tours du premier axe dont il s'agit d'enregistrer les révolutions.

Engrenages taillés par une vis et son écrou.

215. Nous terminerons la théorie des engrenages par l'indication d'un curieux système auquel l'étude de leur théorie générale a conduit M. Olivier.

Nous avons vu en étudiant les courbes qui peuvent former les profils des dents des engrenages, qu'elles devaient être pour deux dents agissant l'une sur l'autre enveloppe et enveloppée, et que de plus ces deux courbes pouvaient être considérées comme engendrées toutes deux par le roulement d'une même courbe sur les circonférences primitives.

Or ce que nous avons dit en considérant les engrenages comme réduits à des surfaces planes sans épaisseur, est également vrai, lorsqu'on passe au cas de la pratique, que l'on considère des surfaces au lieu de considérer des lignes.

C'est au reste ce qui se conçoit *à priori* dans le cas général en posant le problème dans toute sa généralité, comme nous allons le faire d'après M. Olivier.

216. Concevons deux axes A et A_1 placés arbitrairement, dans

l'espace l'un par rapport à l'autre (fig. 196) (1). Ayant construit les cercles primitifs C et C_1, imaginons un plan Q de position arbitraire dans l'espace, mais passant par le point x commun aux deux cercles, et traçons dans ce plan Q un cercle D, passant par ce même point x, mais ayant pour centre un point quelconque b du

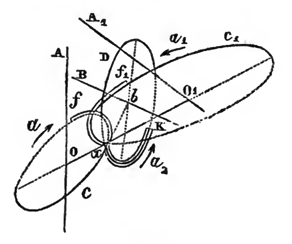


Fig. 196.

plan Q; imaginons enfin un axe B passant par le centre b du cercle D, et perpendiculaire au plan Q de ce cercle.

Cela fait, enroulons un fil sur le cercle C du point f jusqu'au point x, puis sur le cercle D du point x au point K.

Enroulons un second fil sur le cercle C_1 du point f_1 jusqu'au point x, puis sur le cercle D du point x au point K.

Il est évident que si je fais tourner le cercle D autour de son axe B dans le sens indiqué par la flèche a_2, les axes A et A_1 tourneront sur eux-mêmes avec les vitesses convenables v et v_1; rouleront l'un sur l'autre en tournant, le premier dans le sens indiqué par la flèche a, et le second dans le sens indiqué par la flèche a_1. Et ces cercles rouleront *directement* l'un sur l'autre, s'ils ont même tangente au point x, et rouleront *angulairement* l'un sur l'autre, s'ils ont en ce point x des tangentes différentes.

Cela posé, concevons une surface Σ fixée d'une manière invariable au cercle D, et concevons qu'à l'axe A soit fixée une masse de matière M, et qu'aussi se trouve fixée à l'axe A_1 une masse de

(1) Cette théorie est extraite de l'ouvrage de M. Olivier, *Théorie géométrique des engrenages*.

matière M_1. Pendant que le cercle D tournera autour de son axe B, les masses M et M_1 tourneront autour des axes A et A_1, le rapport de leurs vitesses angulaires étant constant et égal à $\frac{v}{v_1}$; en même temps que la surface Σ se mouvra dans l'espace, entraînée qu'elle est par le cercle D.

Et si l'on considère la surface Σ comme un *outil*, cet outil Σ fera successivement son logement, soit dans la masse M, soit dans la masse M_1; ces logements successifs que l'on obtiendra en faisant mouvoir le cercle D formeront une surface Φ fixée à l'axe A, et une surface Φ_1 fixée à l'axe A_1, et ces deux surfaces *enveloppes*, qui évidemment auront l'une et l'autre la surface Σ pour *enveloppée* commune, seront telles, que supprimant le cercle D et la surface Σ, elles se conduiront uniformément.

La surface Σ se met à chaque instant du mouvement en contact avec la surface Φ, par une caractéristique ξ, et cette surface Σ se met aussi à chaque instant du mouvement en contact avec la surface Φ_1 par une caractéristique ξ_1; en général les courbes ξ et ξ_1 seront des lignes différentes et distinctes, et comme elles sont toutes deux tracées sur la surface Σ, en général elles se couperont en un point; par conséquent, d'après ce mode de construction, on peut dire que les dents de l'engrenage ne se toucheront que par un point.

Ces engrenages sont dits de *précision*, et l'on voit qu'ils deviennent de *force*, dans le cas particulier qui n'est autre que le mode de solution employé jusqu'ici, lorsque l'on suppose que le cercle D se confond avec l'un des cercles C ou C_1.

De cette théorie tout à fait générale, nous pouvons descendre aux cas particuliers, car la surface Σ pouvant être une surface quelconque; on peut prendre pour surface Σ un plan χ, et dès lors comme l'enveloppe de l'espace parcouru par un plan est toujours une surface développable, les deux surfaces Φ et Φ_1 seront développables, et dès lors d'une construction plus facile dans la pratique.

Le plan Q, sur lequel est tracé le cercle D, peut faire avec le plan du cercle C_1 un angle arbitraire α' et en même temps la trace de ce plan Q sur le plan du cercle C peut faire avec le rayon ox de

ce cercle C un angle arbitraire β; on peut donner à chacun des angles α et β suivant que l'on considère l'un des trois cas, *axes parallèles, axes qui se coupent, axes non situés dans un même plan,* une valeur particulière et telle qu'elle amène des simplifications dans la construction *pratique* de l'engrenage.

On peut en dire autant du cercle D, car on peut prendre son centre *b* partout où l'on veut sur le plan Q, on pourra donc lui donner une position particulière et telle qu'elle permette avec plus de simplicité l'*épure* qui doit servir à construire le *relief.*

On peut aussi tracer le cercle D avec un rayon plus ou moins grand, le rayon du cercle D peut même être infini, et dès lors ce cercle devient une ligne droite L (fig. 197) passant par le point x, et

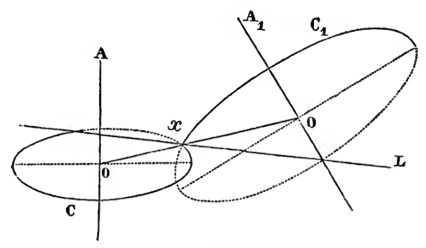


Fig. 197.

pouvant avoir dans l'espace une position arbitraire par rapport aux axes A et A_1. C'est ce que nous supposerons dans ce qui va suivre.

217. *De l'exécution mécanique d'un nouveau genre d'engrenage.* Nous allons voir comment la considération d'une surface, qui par ses deux enveloppées détermine les formes des dents, va nous permettre de construire un genre tout nouveau d'engrenage auquel il eût été bien difficile d'arriver par toute autre considération. Étant donnés, l'axe A et l'axe A_1 leur plus courte distance l, et la droite L faisant un angle α avec l'axe A, concevons qu'une surface Σ, s'étant mue parallèlement à elle-même le long de la droite L, ait pris les positions Σ Σ' Σ'' Σ''' équidistantes entre elles; la distance entre deux positions étant mesurée parallèlement à la droite L et égale à une quantité h.

Le cercle C de rayon ρ aura sa circonférence $2\pi\rho$ égale à mh, et nous supposerons que h soit tel que m se trouve un nombre entier.

Cela posé, chaque surface $\Sigma\,\Sigma'\,\Sigma''\,\Sigma'''$ engendrera une surface enveloppe $\Phi\,\Phi'\,\Phi''\,\Phi'''$, dans le mouvement déjà décrit, et l'on aura ainsi m surfaces enveloppes placées sur le contour du cercle C et angulairement équidistantes.

Le cercle C_1, du rayon ρ_1, aura sa circonférence $2\pi\rho_1$, égale à nh, et n sera un nombre entier, en admettant que $\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{V_1}{V}$ soit un nombre commensurable.

Cela posé, chaque surface $\Sigma\,\Sigma'\,\Sigma''\,\Sigma'''$ engendrera de même une surface enveloppe $\Phi_1\,\Phi_1'\,\Phi_1''$, et l'on aura ainsi n surfaces enveloppes placées sur le pourtour du cercle C_1, et angulairement équitantes.

Et si nous admettons que le système étant en repos, les couples de surfaces Φ et Φ_1, Φ' et Φ_1', Φ et Φ'', se trouvent en contact, il s'ensuivra qu'en faisant mouvoir les axes A et A_1, avec les vitesses respectives V et V_1 les surfaces Φ et Φ_1, Φ et Φ_1', Φ'' et Φ_1'', se conduiront uniformément en restant en contact pendant un *trajet* plus ou moins long, et que lorsque Φ et Φ_1 se quitteront (immédiatement après, ou un peu après, ou un peu avant, suivant la longueur du trajet pendant lequel Φ et Φ_1 peuvent être en contact), les surfaces Φ' et Φ_1' se mettront en contact et ainsi de suite.

On voit évidemment que nous obtenons ainsi un véritable engrenage composé de deux roues dentées et dans lequel les deux axes ne sont pas situés dans le même plan.

Il s'agit de réaliser ces conceptions théoriques.

Pour cela il faut remarquer que si nous engendrons la surface Φ au moyen d'un outil V terminé par la face convexe de la surface Σ (supposée jusqu'ici sans épaisseur), nous devrons engendrer la surface Φ_1 au moyen d'un outil V_1, terminé par la face concave de Σ, en d'autres termes, l'outil V sera l'épreuve dont l'outil V_1 sera la *contre-épreuve*, ou l'outil V sera le *relief* dont l'outil V_1 sera le *creux*.

La vis et l'écrou de cette vis nous offrent dans les arts les

seuls outils dans lesquels ces deux surfaces se rencontrent; la vis triangulaire notamment va nous fournir une solution facile.

Nous placerons l'axe de la vis V dans la direction de la droite L, et cette vis V taillera sur le pourtour de la rondelle les diverses surfaces $\Phi\ \Phi'\ \Phi''\ \Phi'''$. Ensuite nous placerons l'axe de l'écrou dans la direction de la droite L, et cet écrou V_1 taillera sur le pourtour de la rondelle cylindrique C_1 les diverses surfaces Φ_1, Φ_1', Φ_1'', Φ_1'''.

218. En effet une vis se trouve composée d'un certain nombre de spires équidistantes entre elles; de plus, nous savons par la *pratique des arts*, qu'une vis triangulaire, transformée en un outil propre à tailler, dit *taraud*, au moyen d'entailles faites sur les surfaces supérieures et inférieures de chaque filet, taille parfaitement une rondelle métallique; c'est par ce moyen que l'on construit *l'engrenage à vis sans fin.*

De plus, on sait que pour que la vis puisse tailler la rondelle, il n'est pas nécessaire que l'axe A de la rondelle et l'axe de la vis soient à angle droit; ces deux axes peuvent faire entre eux un angle aigu. Seulement il faudrait, par l'expérience, déterminer la limite de l'angle aigu sous lequel la vis peut encore tailler avec facilité, car il est clair que lorsque l'axe de la vis est parallèle à l'axe A de la rondelle, celle-ci ne peut plus être taillée par la vis.

219. Voyons maintenant à nous servir de l'écrou de la vis pour denter la rondelle.

Si le diamètre de C_1 est plus grand que le diamètre de l'écrou, il faudra évider la rondelle C_1 et lui donner la forme d'un anneau; ensuite envelopper cet anneau par l'écrou, et en pressant l'écrou contre la surface extérieure de cet anneau, on parviendra à tailler et denter cette surface extérieure.

Il faudra ensuite monter l'anneau sur l'axe A pour former la roue C_1. Cette opération auxiliaire est évidemment inutile si le diamètre de la rondelle est plus petit que le diamètre intérieur de l'écrou. Le rayon de la rondelle C_1 devra être égal à $\rho_1 + i$, $2\pi\rho_1$ étant égal à $n\,h$, n étant le nombre de dents que la roue C_1 doit porter, h le pas du filet de l'écrou, et $2i$ la profondeur de ce filet.

220. L'exécution mécanique de cette idée constituera une machine nouvelle et destinée à tailler un engrenage; l'une des roues

étant dentée au moyen de vis triangulaire, l'autre roue étant dentée au moyen de l'écrou de cette vis.

Évidemment l'exécution d'une telle machine est possible (1).

Examinons maintenant comment on devra mettre en présence les roues C et C_1, taillées et dentées au moyen de cette machine, pour former un engrenage.

L'axe de la vis pourra faire avec A de la rondelle à tailler C un angle arbitraire α. Cet angle une fois choisi, l'axe de l'écrou devra faire avec l'axe A_1 de la rondelle à dent C_1 un angle égal à $(\alpha - \beta)$, β étant l'angle que les deux axes A et A_1 doivent faire entre eux.

Ainsi les deux axes devant être parallèles, l'angle β sera nul, et l'axe de l'écrou devra faire avec l'axe A_1 le même angle α que l'axe de la vis fait avec l'axe A.

On pourra donc construire un engrenage extérieur composé de deux roues dentées et aptes à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes parallèles, ou entre deux axes faisant entre eux un angle β, lequel pourra varier de 0 à 90°.

On voit aussi qu'ayant construit une roue dentée C, on pourra disposer autour de cette roue une suite de pignons C_1 C_2 C_3, de rayons différents, ou, en d'autres termes, portant un nombre différent de dents; ainsi C_1 un nombre m_1, C_2 un nombre m_2, C_3 un nombre m_3, et tel que leurs axes A_1, A_2 A_3 ne soient pas situés dans un même plan avec l'axe A de la roue centrale C, et telles encore que les axes A et A_1 faisant un angle β_1; A et A_2 un angle β_2; A et A_3 un angle β_3, les angles β_1 β_2 β_3 étant égaux ou inégaux.

221. Nous obtenons donc ainsi un engrenage dans lequel une roue dentée C pourra conduire en même temps une roue dentée *conique* C_1, une roue dentée *cylindrique* C_2, et une roue dentée *hyperboloïdique* C_3, car tout ce que nous avons dit est indépendant des positions particulières des axes, est tout à fait général. Dans ce système : 1° l'axe A_1 de la roue *conique* C_1 pourra couper l'axe A de la roue C, sous un angle variable et en un point variable; 2° l'axe A_2 de la roue *cylindrique* C_2 ne pourra pas être plus

(1) On peut voir cette machine au Conservatoire des Arts et Métiers, pour lequel M. Olivier l'a fait exécuter d'après ces principes.

ou moins éloigné ou rapproché de l'axe A de la roue C; mais 3° l'axe A_3 de la roue *hyperboloïdique* C_3 pourra être plus ou moins rapproché ou éloigné de l'axe A de la roue C, et pourra faire avec cet axe un angle variable; cela a lieu parce que dans le premier et troisième cas, on peut faire tourner la roue C_1 ou la roue C_3 autour de l'axe de l'écrou ou de l'axe de la vis dont on s'est servi pour tailler cette roue C_1, puisque la forme des dents, qui ne dépend que du rayon du cercle primitif et de la forme de la vis, ne sera en rien changée par cette rotation.

On doit ajouter que les *variations* qui peuvent avoir lieu : 1° Quant à l'amplitude des angles que ces axes peuvent faire entre eux, et 2° quant à la grandeur de la plus courte distance qui peut exister entre ces mêmes axes ne peuvent avoir lieu qu'entre certaines limites; mais quelques restreintes que ces limites puissent être, suivant les cas particuliers, les *variations* permises offriront toujours, dans la *pratique*, une grande facilité pour la *pose* des axes et la *disposition* des mécanismes.

Remarquons encore que ces engrenages sont à retour. En effet, le filet de vis étant terminé par deux surfaces, si nous désignons la nappe supérieure par ς et la nappe inférieure par Σ, les diverses spires $\varsigma\varsigma'\varsigma''$ donneront naissance, sur la rondelle, aux surfaces enveloppes Φ, Φ', Φ'', et les spires $\Sigma\Sigma'\Sigma''$ aux surfaces enveloppes $\Pi\Pi'\Pi''$. Comme il en sera de même de la roue dentée au moyen de l'écrou, suivant le sens du mouvement, ce seront les surfaces Φ, Φ', Φ'' ou les surfaces Π, Π', Π'' qui agiront, mais toujours dans les conditions voulues.

222. *Engrenage intérieur.* A première vue, il semblerait que l'engrenage *intérieur* doit être construit par les mêmes procédés mécaniques que ceux au moyen desquels l'engrenage *extérieur* a été obtenu, et qu'ainsi, il suffira de denter la surface intérieure de l'anneau au moyen de l'écrou, ainsi qu'on avait denté sa surface extérieure lorsqu'on voulait obtenir l'engrenage extérieur.

Mais avec un peu de réflexion, on voit que dans ce cas, l'écrou ne pourrait tailler des dents; car à mesure qu'il travaillerait et qu'on l'enfoncerait dans l'anneau, il détruirait le travail précédent, et, en définitive, on n'obtiendrait qu'une surface cylindrique con-

cave et non pas une suite de dents. Un exemple très simple peut faire concevoir qu'il doit en effet en être ainsi.

Supposons que l'on veuille construire en relief deux surfaces cylindriques, l'une convexe et l'autre concave. On pourra toujours considérer la surface convexe comme l'enveloppe d'un outil *plan*, d'une largeur arbitraire ; mais la surface concave ne pourra être considérée que comme l'enveloppe d'un outil plan, d'une largeur infiniment petite, en d'autres termes, que comme engendrée par une ligne droite. De sorte que si, par hasard, la surface concave ne peut pas être engendrée mécaniquement par une ligne droite, et que l'on ne puisse employer comme outil qu'un plan d'une largeur donnée, il faudra, pour obtenir cette surface concave, construire la surface convexe et prendre la *contre-épreuve* de cette surface pour obtenir la surface concave demandée.

Tel est, en effet, le moyen qu'il faudra employer pour obtenir l'engrenage *intérieur* destiné à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes non situés dans le même plan, du moment qu'on veut employer comme outils une vis triangulaire et son écrou.

Il est évident que si l'écrou ou la vis, en travaillant la surface intérieure d'un anneau, pouvaient denter cette surface, la forme de la surface de la dent obtenue serait la face concave de la surface Φ_1 ou Φ, dont on obtient la surface convexe en dentant la surface extérieure du même anneau au moyen de l'écrou ou de la vis.

On devra donc, pour construire l'engrenage intérieur, employer l'un des procédés suivants :

1° Denter la surface extérieure de la petite roue intérieure C au moyen de la vis ; puis denter la surface extérieure de la roue C_1 au moyen de l'écrou, tout comme si l'on voulait exécuter un engrenage extérieur ; et enfin prendre la *contre-épreuve* C_2 de la roue C_1 ; retourner sens dessus dessous la roue C_2 et la présenter à la roue C ;

2° Ou denter la surface extérieure de la petite roue intérieure C au moyen de l'écrou ; puis denter la surface extérieure de la roue C_1 au moyen de la vis ; prendre la *contre-épreuve* C_2 de la roue C_1 ; etourner sens dessus dessous la roue C_2 et la présenter à la roue C.

Ce retournement est évidemment nécessaire, puisque la surface

des dents prend naissance autour d'une roue dentée, obtenue en faisant tourner de 180° la roue intérieure autour de l'axe de la vis (c'est à cela que revient la construction indiquée). Il faudra donc répéter en sens inverse cette opération en retournant la roue.

223. Si après avoir denté une roue C au moyen d'une vis V, on suppose que la vis V tourne sur son axe B, elle entraînera la roue dentée C et la forcera à tourner autour de son axe A, on aura alors *un engrenage à vis sans fin;* les angles des deux axes pourront différer d'un angle droit.

224. *Du frottement dans cet engrenage.* Les dents sont, comme nous l'avons dit, toujours en contact par un point dans le système d'engrenage qui vient d'être décrit. Ce sont donc des engrenages de *précision* et non de *force,* se touchant par une ligne.

Le frottement développé par le travail de l'engrenage sera un *frottement de glissement angulaire,* lorsque les axes A et A_1 ne seront pas situés dans un même plan, et feront entre eux un angle θ plus ou moins aigu, et un *frottement de glissement direct,* lorsque les axes A et A_1 seront parallèles ou se couperont sous un angle θ aigu ou droit; en d'autres termes, lorsque ces deux axes seront situés dans le même plan.

Le frottement ne sera pas de roulement, car les conditions pour que le frottement soit de cette nature ne sont pas satisfaites.

Organes agissant à l'aide d'intermédiaires flexibles.

225. Les courroies servent à transmettre le mouvement, dans un rapport de vitesse constant entre deux axes disposés d'une manière quelconque dans l'espace. Nous avons vu la disposition qui convenait dans le cas de deux axes parallèles; elle conviendrait évidemment encore, dans le cas d'une disposition quelconque des axes, si les courroies pouvaient passer du plan d'une poulie perpendiculaire à l'un des axes à celui d'une deuxième poulie disposée semblablement pour l'autre axe sans échapper, quand l'obliquité de la traction devient sensible, de la gorge des poulies. C'est ce qu'on empêche, grâce à la flexibilité des courroies, à l'aide de poulies-guides, employées accessoirement à celles montées sur les axes de rotation, et qui permettent à la courroie d'exercer son

action sur la poulie dans le plan de celle-ci, et, par suite, sans tendre à l'abandonner.

226. Ainsi une courroie exerçant son action suivant la ligne A*f* (fig. 198), si l'on veut que cette action se continue suivant une ligne B*g*, disposée d'une manière quelconque dans l'espace, par rapport à A*f*; il suffira de joindre deux points *f* et *g*, et dans les deux plans A*fg*, B*gf* de placer aux points *f* et *g* deux poulies-guides. Il est clair que la courroie, suivant la direction A*fg*B transmettra son action de A*f* en B*g*; les deux brins sortant de chaque poulie seront toujours dans le plan de celle-ci, et, par suite, ne tendront nullement à l'abandonner.

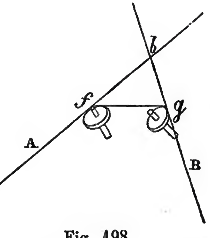


Fig. 198.

Il est, d'après cela, toujours facile de transmettre, à l'aide d'une courroie sans fin, le mouvement entre deux axes disposés d'une manière quelconque dans l'espace.

Adaptons perpendiculairement à chacun des deux axes deux cercles (fig. 199), dont les rayons soient dans le rapport donné des vitesses. Soit *cd* la ligne d'intersection des plans de ces deux cercles; prenez sur cette ligne deux points *c* et *d*, et de chacun de ces points, menez une tangente à chaque poulie. L'ensemble *ecgdhdf* indiquera la disposition qu'on devra donner à une courroie sans fin, qui n'éprouvera que des tractions toujours exercées dans le plan des poulies, pourvu qu'on place en *c* et en *d* deux poulies-guides, l'une dans le plan *dfh*, l'autre dans le plan *egc*.

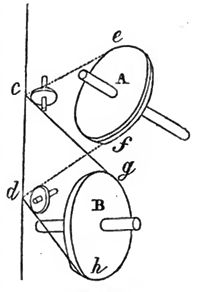


Fig. 199.

Il est clair encore qu'en prenant pour une des poulies les tangentes menées des deux points *c* et *d*, autres que celles indiquées sur la figure, on changerait le sens du mouvement de l'axe correspondant.

Intermédiaires rigides.

227. Nous avons vu que la bielle ne pouvait servir à transmettre des rotations dans un rapport de vitesse constant, qu'autant qu'elle reste toujours parallèle à la ligne des centres, c'est-à-dire que les bras des manivelles soient égaux et les axes parallèles. Nous allons bientôt rencontrer la bielle appliquée à transmettre le mouvement circulaire continu entre des axes non parallèles, et vérifierons encore que le rapport des vitesses est alors variable conformément à ce que nous avons déjà vu.

Deuxième section. — Rapport des vitesses variable.

1° AXES PARALLÈLES.

Organes agissant par contact immédiat et à frottement de roulement.

228. Pour que deux courbes situées dans un plan perpendiculaire aux deux axes, se touchant en un point, et tracées en raison de la loi de variation des vitesses angulaires, puissent rouler l'une sur l'autre sans glissement et par suite fournir la solution du problème proposé, il faut, comme nous l'avons vu en traitant de la poussée de deux courbes qui se conduisent (art. 119) :

Que les deux rayons vecteurs, menés des deux centres de rotation au point de contact, se confondent en chaque instant avec la ligne des centres.

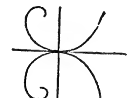
Cette condition, qui revient à dire que les deux rayons vecteurs au point de contact soient constamment en ligne droite, ne peut être satisfaite qu'autant que chacun d'eux fait avec la tangente, en chaque élément qui vient en contact, un même angle; car, au contact, la normale étant commune fait un même angle avec les rayons vecteurs puisque ceux-ci sont en ligne droite, il en est donc de même des deux tangentes qui se confondent alors avec la tangente commune.

Euler a indiqué une courbe qui satisfait à cette condition, la spirale logarithmique dans laquelle le rayon vecteur en un point,

fait toujours le même angle avec la tangente en ce point (1). Ainsi on peut distinguer trois cas :

Si la tangente fait un angle droit avec les rayons vecteurs, on a deux circonférences et un rapport de vitesses constant; cas déjà examiné.

Si la tangente fait un angle constant, différent d'un droit, avec les rayons vecteurs, on obtient deux spirales logarithmiques égales (fig. 200), dont la tangente fera toujours cet angle constant avec la ligne des centres. Ces deux courbes non fermées ne pourraient servir que pour une petite longueur.


Fig. 200.

(1) Voici comment Euler établit d'une manière générale, d'après la considération ci-dessus, les relations entre deux courbes satisfaisant à la question :

Supposons que la fig. 201 représente une paire quelconque de courbes de roulement, et soit $r = s\mathrm{P}$ la distance du point de contact au centre de rotation s de la première courbe et $\theta = as\mathrm{P}$ l'angle de r avec le rayon fixe sa.

Soient de même $\mathrm{PH} = r_1$, $\mathrm{APH} = \theta_1$ les quantités correspondantes pour la seconde courbe, c étant la distance $s\mathrm{H}$ des deux centres; puisque r et r_1 doivent être en ligne droite, on a :

$$r + r_1 = c, \text{ d'où } dr = -dr_1.$$

D'ailleurs, les longueurs des courbes AP, aP qui ont été en contact à partir d'une position antérieure étant égales ; et comme chaque élément de courbe est exprimé par :

$$\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta} \quad \text{et} \quad \sqrt{dr_1^2 + r_1^2\,d\theta_1^2},$$

on a :

$$\int\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \int\sqrt{dr_1^2 + r_1^2\,d\theta_1^2},$$

comme $dr = -dr_1$, l'égalité ci-dessus donne $r\,d\theta = r_1\,d\theta_1 = (c-r)\,d\theta_1$.

On arrive encore à cette relation en remarquant que comme $\frac{r\,d\theta}{dr}$ est la tangente de l'angle qui fait la première courbe avec r, et $\frac{r\,d\theta_1}{dr_1}$ l'angle de la seconde courbe avec r_1, et que ces angles sont les mêmes, on a : $\frac{r\,d\theta}{dr} = -\frac{r_1\,d\theta_1}{dr_1}$ ou $r\,d\theta = r_1\,d\theta_1$, comme ci-dessus.

De là on déduit : qu'une courbe étant donnée par son équation entre r et θ, l'autre est déterminée par les équations :

$$r_1 = c - r \text{ et } \theta_1 = \int\frac{r\,d\theta}{c-r},$$

intégration qui pourra toujours s'effectuer, lorsque les relations entre r et θ, l'équation de courbe donnée, sera linéaire.

Enfin généralement si la tangente fait un angle variable, mais le même pour les deux courbes, avec les rayons vecteurs qui se mettent en ligne droite au point de contact, on aura des courbes qui se conduiront sans glissement.

On satisfait à cette condition en employant deux ellipses égales, mais tournant chacune autour d'un foyer différent. En effet, soient

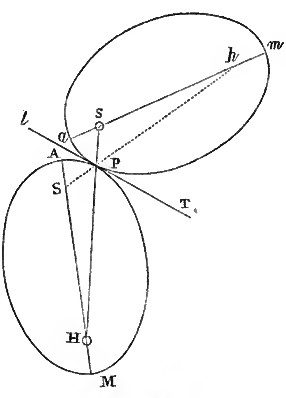


Fig. 201.

s, H, les deux centres de rotation (fig. 201), et P le point de contact sur cette ligne, Tl la tangente en ce point. Menons la ligne SP $=s$P faisant un angle lPS $= l$P$s =$ HPT ; il est évident que si des deux points S et H, comme foyers, et avec la longueur constante SPH on trace une ellipse;

Que des points s et h (ce dernier obtenu en prolongeant SP, et prenant P$h =$ PH, d'où $sh =$ SH) on trace une seconde ellipse égale à la première;

Ces deux ellipses égales, qui se touchent en des points placés symétriquement, pourront rouler l'une sur l'autre sans glissement; car la tangente à l'ellipse fait toujours des angles égaux avec les rayons vecteurs menés de ses deux foyers au point de contact, ce qui est précisément la condition à laquelle il s'agit de satisfaire

lorsque, comme nous l'obtenons par la construction précédente, le rayon vecteur de la seconde ellipse est égal à celui mené au point de contact du second foyer de la première et symétriquement placé. Théoriquement donc, deux ellipses égales peuvent se mener par contact et en n'engendrant qu'un frottement de roulement.

Mais il faut remarquer, qu'outre qu'il est presque impossible dans la pratique d'exécuter deux ellipses identiques, la pression au point de contact s'exerçant suivant des inclinaisons variables, l'adhérence est également variable. De plus, après un demi-tour, cette inclinaison change de telle sorte, que l'ellipse menante s'éloignant de l'autre, il faudrait qu'il y eût entre leurs surfaces une adhérence attractive pour que le mouvement pût continuer. Nous supposerons qu'il en est ainsi pour poursuivre ces considérations géométriques, et verrons plus loin comment ces difficultés sont surmontées dans la pratique.

229. *Rapport des vitesses.* Comme nous l'avons vu (art. 127), les vitesses angulaires de deux courbes roulant l'une sur l'autre, sont en chaque instant en raison inverse des longueurs interceptées sur la ligne des centres, entre ces centres et le point de rencontre de la normale commune aux deux courbes au point de contact. Il est clair que a et b étant les longueurs AH, AS du grand axe, la longueur *maximum* interceptée sur la ligne des centres sera a et la longueur *minimum* b, longueurs qui se mettront en ligne droite lorsque le contact aura lieu suivant les extrémités des grands axes. Le maximum du rapport des vitesses angulaires A, A_1 sera donc $\frac{A}{A_1} = \frac{a}{b}$, et le minimum $\frac{A}{A_1} = \frac{b}{a}$. Le rapport du maximum au minimum, ou la variation totale possible sera donc $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b^2}$.

Le rapport de la vitesse angulaire de l'axe conduit à celle de l'axe conducteur passe donc par un maximum et un minimum pour revenir au point de départ.

Mais si ce rapport devait atteindre plusieurs maxima dans une

seule rotation, le système de deux ellipses deviendrait insuffisant. On peut résoudre alors le problème par des courbes qui ont une certaine analogie avec l'ellipse dont nous allons les déduire, et qui doivent porter un nombre de saillies égal à celui des maxima.

COURBES A PLUSIEURS SAILLIES OU A PLUSIEURS VENTRES.

230. Soit à construire une courbe à deux saillies. Construisons une ellipse dont le grand axe soit égal à la distance des centres (nous verrons plus loin comment), et divisons les deux angles droits autour d'un des foyers en un certain nombre de parties égales, six

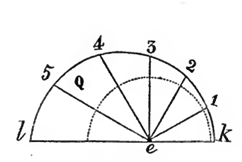


Fig. 202.

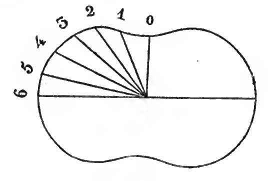


Fig. 203.

par exemple (fig. 202). Traçons maintenant un angle droit et divisons-le en six parties égales. Sur chacune des lignes de division portons des longueurs $e' 1$, $e' 2$, $e' 3$.... égales aux rayons vecteurs de correspondants de l'ellipse, c'est-à-dire à $e 1$, $e 2$, $e 3$...., nous déterminerons tant de points que nous voudrons d'une courbe (fig. 203).

Répétant cette construction symétriquement dans les quatre angles droits contigus, on aura une courbe fermée à deux ventres qui pourra mener une semblable courbe par roulement, en faisant naître deux maxima et deux minima dans le rapport des vitesses ; ces deux courbes étant disposées de telle sorte que le rayon correspondant à $e k$, dans l'une, se mette en ligne droite avec le rayon correspondant à $e l$ de l'autre.

En effet, si l'on compare la rotation de ces deux courbes à celle des deux ellipses qui ont fourni les rayons vecteurs, on voit que les mêmes rayons vecteurs arriveront en même temps sur la ligne des centres, par suite se toucheront et se mettront en ligne droite comme s'il s'agissait de deux ellipses, en décrivant seulement des

angles moitié de ceux qui seraient décrits dans ce cas, et que pour un rayon vecteur de la courbe qui mène, le rayon vecteur de la courbe menée sera de la longueur correspondante à celui de la seconde ellipse pour un même angle; donc, enfin, il n'y aura pas de glissement, puisque la condition de l'art. 119 sera satisfaite, et les courbes se conduiront par roulement.

231. La construction que nous venons de décrire peut évidemment s'appliquer à une courbe d'un nombre quelconque de saillies; donnons pour exemple la construction de celles à trois et à quatre saillies

Pour construire la courbe à trois saillies (fig. 204), on décrit autour du centre un cercle qu'on divise en six secteurs égaux, chacun devant correspondre à la moitié d'une saillie. On le divise en autant de parties que la demi-ellipse Q, et on mène les rayons sur lesquels on prend des longueurs égales aux rayons correspondants de la demi-ellipse, comme il est indiqué par les mêmes lettres sur les deux figures. Par ces points on fait passer une courbe qui est le contour de la demi-saillie, qui répétée six fois forme la courbe à trois saillies.

On trace la courbe à quatre saillies en divisant le cercle tracé

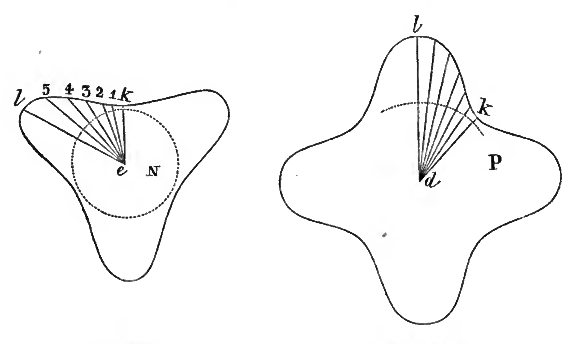


Fig. 204. Fig. 205.

(fig. 205) autour du centre de rotation en huit parties, chacune correspondant à la moitié d'une saillie; on transporte, de la même manière que dans le cas précédent, les longueurs des rayons vec-

teurs de l'ellipse sur les rayons de la demi-saillie de la courbe à quatre saillies pour obtenir le tracé de celle-ci, et par suite le tracé de la courbe.

Une paire de courbes semblables se conduisent par roulement; il en serait ainsi pour des courbes pareillement construites d'un nombre quelconque de saillies.

232. Nous avons dit que ces courbes avaient une certaine analogie avec l'ellipse, par suite du mode de construction; il est facile de voir qu'elles constituent une famille de courbes dont l'ellipse est un cas particulier.

En effet, quand on considère l'équation de l'ellipse en coordonnés polaires, on sait que cette équation est $\rho = \frac{p}{1 + e \cos. \omega}$.

Notre construction revient à remplacer dans les courbes à m ventres (fig. 206), pour une même valeur de ρ, l'angle ω de l'ellipse par un angle $\omega' = \frac{\omega}{m}$; l'angle du rayon vecteur de ces courbes est égal à celui de l'ellipse divisé par m, ou $\omega = m\omega'$; l'équation générale de ces courbes est donc :

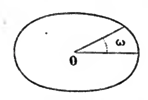


Fig. 206.

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos. m\omega},$$

m étant le nombre des saillies.

233. *Vitesses.* Le rapport des vitesses maxima et minima est $\frac{a^2}{b^2}$ dans tous les cas, comme pour deux ellipses; il suffit pour le voir de chercher la valeur de ce rapport lorsque le contact a lieu au milieu d'un ventre d'une courbe et à l'extrémité d'une saillie de l'autre courbe, ou inversement. Si donc ce rapport est donné, comme on a d'ailleurs $a + b = l$ distance des centres, il sera facile de déduire de ces deux équations la valeur de a et b, c'est-à-dire la position des foyers de l'ellipse sur le grand axe. Cette ellipse sera comme on sait complétement déterminée puisqu'on connaîtra la position des foyers et la longueur du grand axe $l = a + b$, c'est-à-dire la somme constante des deux rayons vecteurs menés

des deux foyers à un point quelconque de l'ellipse. La construction s'achèvera donc sans difficulté.

Organes agissant par contact immédiat, généralement à frottement de glissement.

234. Les courbes elliptiques que nous venons d'étudier, étant assimilées aux circonférences primitives roulant l'une sur l'autre que nous avons considérées dans le cas des engrenages, on résoudra le problème de transmettre sûrement le mouvement dans le même rapport de vitesse que si ces courbes roulaient l'une sur l'autre, en les armant de dents engrenant les unes avec les autres.

Les dents devront être également espacées, pour que des longueurs égales des ellipses primitives passent au point de contact. Quant à leurs formes, elles se détermineront par les principes déjà posés. Un point d'une courbe quelconque roulant intérieurement sur une des courbes primitives, et extérieurement sur l'autre, engendrera des profils de dents qui se mèneront avec frottement de glissement, mais conduiront les axes absolument dans les mêmes rapports de vitesse que si les deux courbes roulaient l'une sur l'autre.

De même, si, dans le plan tangent aux deux cylindres ayant pour base les deux courbes elliptiques, on trace une ligne, une droite par exemple, inclinée sur les génératrices ; qu'on enroule ce même plan autour des deux cylindres, il est évident que, pendant le roulement de ceux-ci, les divers points des lignes tracées sur les deux cylindres viendront successivement en contact. Si donc on met ces deux courbes en saillie, et qu'on munisse les deux cylindres elliptiques de dents qui se touchent suivant ces courbes, le mouvement sera communiqué dans les conditions voulues et seulement avec un frottement de roulement. Il n'y a pas lieu à revenir ici sur des considérations déjà présentées et qui n'offrent aucun intérêt dans la pratique.

Comme nous l'avons dit, deux ellipses ne peuvent pas se mener par simple contact; ainsi, dans la fig. 201, la courbe supérieure marchant de droite à gauche, quand le point m aura coïncidé avec M, le rayon vecteur de l'ellipse motrice tendant à diminuer, le mouvement ne peut plus être communiqué par simple pression ;

il faut alors nécessairement armer de dents la moitié du contour des deux ellipses comme le représente la fig. 207. Le mouvement est ainsi maintenu jusqu'à ce que a ait atteint A, ensuite la position des deux rouleaux rend les dents inutiles. Toutefois, comme il peut y avoir glissement dans la pratique, et qu'alors la reprise des dents n'aurait plus lieu dans les rapports de position voulue, on fixe quel-

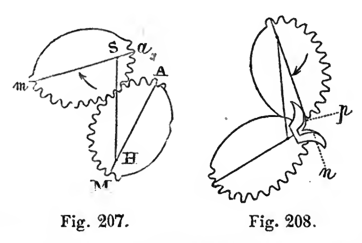


Fig. 207. Fig. 208.

quefois la position respective des deux roues au moment de l'engrènement, à l'aide du système représenté fig. 208. Une cheville p est fixée à l'une des roues et une fourche n à l'autre, et la prise des dents ne commence que lorsque la cheville est parvenue exactement au fond de la fourche, c'est-à-dire, lorsque les deux roues sont dans des positions convenables. Cette condition à remplir suffit évidemment pour déterminer la position de la fourche et indiquer la forme qu'elle doit avoir.

235. La difficulté d'obtenir une paire de courbes de roulement elliptiques est quelquefois évitée par le système représenté fig. 209. A est une roue elliptique tournant autour de son centre B, et dont le contour est garni de dents; C est un pignon circulaire garni de dents semblables à celles de la roue. Le centre de ce pignon n'est pas fixe, mais porté par un levier qui tourne autour du centre D. Quand A tourne, le levier s'élève avec le pignon qui tourne

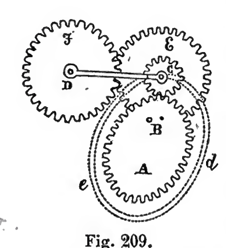


Fig. 209.

avec la vitesse correspondante à la longueur du rayon qui passe

au point de contact. Pour que les dents restent toujours dans la position la plus convenable pour leur action, la roue A porte une plaque qui lui est attachée, et l'axe de C passe dans une rainure *de* pratiquée dans cette plaque. Cette rainure est distante de l'ellipse primitive de la roue elliptique d'une longueur égale à celle du rayon primitif du pignon, mesurée sur la normale en chaque point. Quand donc la roue A tourne, la rainure se meut aussi; les dents de la roue et du pignon restent toujours en prise.

Soit R le rayon de C, r le rayon de A au point de contact, ω, ω' les vitesses angulaires des deux axes, φ l'angle de R et r au point de contact, on a :

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de A}}{\text{Vitesse angulaire de C}} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R}{r} \cos. \varphi;$$

car $r\omega = R\omega' \cos. \varphi$; puisque lors de chaque rotation instantanée les longueurs qui passent au point de contact sont égales, tant celle de la rotation autour du centre fixe que celle du pignon, dont le centre est mobile et dont l'arc décrit du centre considéré comme fixe, doit être projeté sur le premier arc.

Comme le centre de C fait des oscillations, il est nécessaire, en général, de communiquer le mouvement à un axe fixe ; pour cela, la roue E étant fixée au pignon C, on fait engrener celle-ci avec une seconde roue F, concentrique au levier. Lorsque A tourne, la rotation de C est communiquée par la roue E à la roue F, et c'est dans le mouvement de celle-ci que se combinent les oscillations du levier et la rotation du pignon qui lui communiquent exactement le mouvement de la roue elliptique.

236. A une roue elliptique est substituée quelquefois une roue ordinaire (fig. 210) se mouvant autour d'un point différent de son centre; on maintient à l'aide d'une barre le centre de A à la distance convenable du centre C, comme dans l'exemple précédent le pignon C par rapport au centre D. Cette combinaison, formée exclusivement de roues ordinaires, est une des plus simples pour varier le rapport des vitesses angulaires.

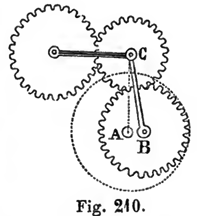


Fig. 210.

237. *Roues de Roëmer.* Ces roues avaient été proposées par l'astronome Roëmer pour varier le mouvement dans les machines planétaires.

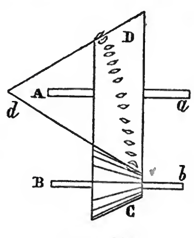
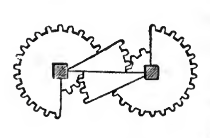


Fig. 211.

Aa, Bb (fig. 211) sont deux axes parallèles dont l'inférieur est garni d'une roue conique, portant comme à l'ordinaire des flancs dans toute sa hauteur. A l'opposé un cône D est fixé à l'axe Aa et son sommet *d* est à l'opposé de celui du premier cône; il est déterminé par la rencontre de l'axe A *a* et d'une génératrice du cône C. Plaçant sur ce cône des chevilles à différentes distances du sommet *d*, on obtiendra les rapports de vitesse que l'on voudra entre les limites $\frac{R}{r_1}$ et $\frac{r}{R_1}$, R et *r* étant les rayons des deux faces de D, r_1 et R_1 ceux des faces de C. Le premier est obtenu en plaçant des chevilles faisant fonctions des dents sur le bord de la face la plus large de D, le second sur le bord de celle du moindre rayon. Dans des positions intermédiaires on obtiendra des rapports de vitesses intermédiaires.

238. *Secteurs dentés.* Si, au lieu de varier d'une manière continue, les vitesses des deux axes devaient être dans des rapports différents dans partie de leur rotation, on pourrait employer, à cet effet, la combinaison d'engrenages représentée figure 212. Deux roues sont entaillées dans une partie de leur circonférence et remplacées par des segments d'autres roues montées sur les mêmes arbres, dont les rayons sont en raison inverse des nouvelles vitesses qu'il s'agit d'obtenir.


Fig. 212.

Le grand défaut de semblables systèmes, comprenant des secteurs d'un plus ou moins grand nombre de roues, réside dans la difficulté du passage d'une roue à l'autre. L'action des dents des

diverses roues ne peut se succéder instantanément sans qu'il y ait choc et destruction des dents, les vitesses ne correspondant plus, au moment du changement, aux nouvelles circonférences primitives.

Le cas le plus remarquable de variation instantanée de rapport de vitesse et celui qui trouve le plus d'application, est celui du mouvement intermittent, lorsque la roue menée passe alternativement du repos au mouvement, et vice versâ.

On obtient cet effet à l'aide de deux roues dentées ordinaires (fig. 213), en enlevant à la roue menante un certain nombre de

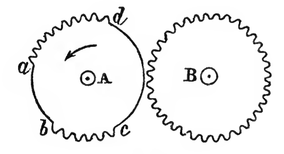


Fig. 213.

dents comme le montre la figure. En proportionnant les longueurs des arcs garnis de dents à celles des arcs qui n'en sont pas munis, on obtient toutes les intermittences voulues de la deuxième roue pour une révolution de la roue menante.

Ces systèmes de dents espacées ont un inconvénient analogue à celui dont nous avons déjà parlé (art. 234). L'axe conduit ne s'arrêtant pas instantanément, les dents de la roue B (fig. 214) peuvent

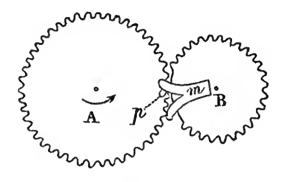


Fig. 214.

ne pas se trouver en prise avec celles de la roue A au moment voulu.

On peut employer alors une fourche et une cheville (comme article 234) pour assurer la reprise des dents toujours au même point.

La meilleure disposition de ce genre est celle représentée dans la figure 215. La partie *m n* de la seconde roue est formée par un arc de cercle décrit du centre de la roue menante, et la circon-

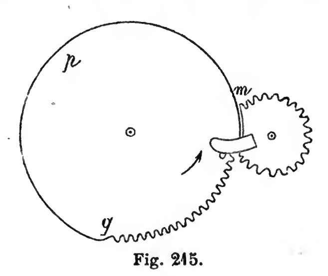


Fig. 215.

férence de celle-ci est formée d'un cylindre auquel les dents sont intérieures dans la partie dentée *q n*. La partie *mn* rencontrant le cylindre ne peut tourner jusqu'au moment précis où les dents peuvent se mettre en contact. Cet effet est produit par une cheville adaptée à la roue menante qui rencontre, au moment convenable, une partie saillante appartenant à la roue conduite; disposition qui offre l'avantage de vaincre l'inertie avant que les dents n'entrent en contact.

Organes agissant à l'aide d'intermédiaires flexibles.

239. Si l'on fait passer autour des courbes elliptiques que nous avons déterminées une courroie sans fin, elle conduira les deux axes dans les mêmes rapports de vitesse que si les deux courbes se menaient par roulement.

Il faut remarquer que, la figure formée par la courroie ne restant pas toujours la même, il faut que sa longueur soit suffisante et qu'un rouleau de tension pouvant se mouvoir, assure la possibilité de toutes les figures en même temps qu'une adhérence suffisante.

Pour les courbes à plusieurs ventres, il faudrait, de plus, que la courroie fut astreinte à quitter successivement et sans soubresauts les divers points de la courbe, et notamment les parties rentrantes, ce qu'il serait difficile d'obtenir simplement. De semblables systèmes ne sont pas employés dans la pratique.

En général, ce genre de communication de mouvement ne sert que pour obtenir un grand nombre de révolutions d'un axe pour un tour de l'autre axe, comme dans le système ci-après.

A est la poulie motrice (fig. 216) dont le contour est disposé pour recevoir une corde sans fin. Il en est de même de la poulie conduite C. Une poulie mobile D portant un poids ou un rouleau de tension déterminant toujours une tension suffisante, le mouvement sera transmis entre les deux axes sans glissement, mais dans des rapports de vitesse variables. En effet, abaissant des deux centres A et C les perpendiculaires Ap, Cq sur la direction de la courroie; le mouvement produit en chaque instant est le même que si pq était une bielle. On a donc (art. 180).

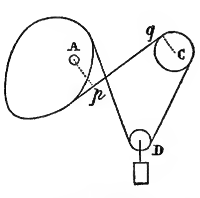


Fig. 216.

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de A}}{\text{Vitesse angulaire de C}} = \frac{Cq}{Ap}.$$

240. On obtiendra tous les rapports voulus de vitesse angulaire de deux arbres par des formes de poulies convenables, en faisant varier les perpendiculaires Ap, Cq, suivant la loi donnée. Telle est la disposition employée dans les montres, et connue sous le nom de fusée.

Un des axes porte un tronc de cône entaillé en spirale sur toute sa hauteur, l'autre, parallèle au premier, un cylindre (fig. 218). Une chaine qui est enroulée en partie sur chacune des surfaces, est fixée par une de ses extrémités à chacune d'elles. La chaîne enroulée sur le cône se déroulant de celui-ci pour s'enrouler sur le cylindre, produira un mouvement dont la vitesse angulaire variera en raison du tracé des spirales.

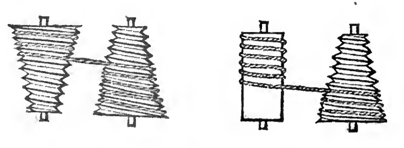


Fig. 217. Fig. 218.

On peut de même employer deux fusées coniques, au lieu d'une fusée et d'un cylindre comme fig. 217.

Organes agissant à l'aide d'intermédiaires rigides.

241. Une bielle servant à la communication du mouvement entre deux axes parallèles, engendre un mouvement dans un rapport de vitesse variable avec le mouvement initial; sauf le cas où la bielle est dans le plan des deux bras de levier, égaux et adaptés rectangulairement à l'extrémité des deux axes, cas déjà examiné qui nous a donné le mouvement circulaire continu dans un rapport de vitesse constant.

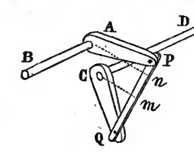


Fig. 219.

En effet, soient AB, CP (fig. 219) deux axes parallèles placés bout à bout, AP et CQ deux leviers reliés par une bielle PQ, montés à l'extrémité des deux axes. An et Cn étant les perpendiculaires menées du centre du mouvement sur la bielle, on aura (art. 180) :

$$\frac{\text{Vitesse angulaire de AP}}{\text{Vitesse angulaire de CQ}} = \frac{\text{C}m}{\text{A}n},$$

rapport variable en chaque instant.

242. Dans un système de ce genre, la rotation continue de l'un des bras peut communiquer au second bras, soit un mouvement circulaire continu, soit un mouvement alternatif que nous étudierons plus loin. L'un ou l'autre de ces mouvements prend nais-

sance suivant les proportions des quatre côtés de la figure formée par la distance des centres, la bielle et les manivelles.

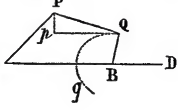


Fig. 220.

Soient A, B les deux centres de rotation (fig. 220), PQ la bielle; en général, pour que AP complète une révolution, il faut que l'on ait à la fois :

$$AB + BQ > PQ + AP$$
$$\text{Et } AB - BQ > PQ - AP.$$

Car si AP avance vers AB, les deux pièces AP, PQ doivent se placer en ligne droite au moment où le point Q atteint sa plus grande distance de A, avant que l'inclinaison de ces lignes ne change de sens. Or cette droite est impossible, à moins que l'on n'ait

$$AP + PQ < AB + BQ \text{ valeur maximum possible,}$$

et semblablement, lorsque AP a tourné de manière à amener Q à sa plus petite distance de A, les lignes AP, PQ forment une droite passant par A, et cette droite n'est possible qu'autant que l'on a :

$$PQ - AP < AB - BQ.$$

Si ces quantités sont égales le mouvement circulaire peut se continuer à plus forte raison; c'est le cas déjà étudié.

243. Si au lieu de réunir les deux extrémités de la bielle, on rendait leur assemblage mobile, on aurait un système analogue au précédent, dans lequel le rapport des vitesses pourrait être astreint à suivre une loi donnée, mais dans lequel le frottement de glissement serait trop grand pour que cet organe puisse être adopté pour la transmission de forces un peu considérables.

Ce mode simple d'obtenir une variation de rapport de vitesse angulaire, pour des rotations qui se continuent indéfiniment dans la même direction, consiste dans l'emploi d'une cheville et d'une rainure adaptées à deux manivelles.

Soient A*a*, B*b* (fig. 221), deux axes parallèles en direction, mais dont les extrémités sont opposées l'une à l'autre.

A*a* porte un bras portant une cheville *d*, qui entre dans une longue rainure traversant un coude semblable, un bras adapté à

l'extrémité de Bb. Quand l'un des axes tourne il communique sa rotation à l'autre, et le rapport des vitesses change sans cesse avec le changement de la distance de la cheville d à l'axe Bb.

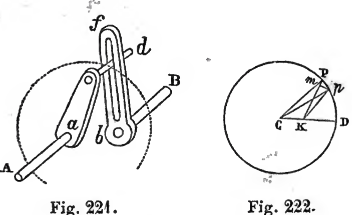


Fig. 221. Fig. 222.

Soit C le centre de rotation du bras à cheville (fig. 222), K le centre de rotation du bras à rainure, P la cheville, R le rayon constant du cercle que la cheville décrit autour de C, r le rayon du cercle K; P se mouvant d'un petit angle de P en p, traçons pm perpendiculaire à PK.

$$\frac{\text{La vitesse angulaire de la cheville}}{\text{La vitesse angulaire de la rainure}} = \frac{\frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{PC}}}{\frac{pm}{p\mathrm{K}}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{R}}}{\frac{\cos.\,\mathrm{CPK}}{r}},$$

car $pm = \mathrm{P}p \cos.\,\mathrm{CPK}$.

Si donc CP tourne d'une vitesse uniforme, la vitesse de PK varie comme $\frac{\cos.\,\mathrm{CPK}}{r}$. Si CK est petit, on peut poser $\cos.\,\mathrm{CPK} = 1$, alors les centres de mouvement étant proches, le rapport des vitesses se trouve $= \frac{r}{\mathrm{R}}$.

Posons $\mathrm{PCD} = \theta$, $\mathrm{PKD} = \mathrm{B}$, $\mathrm{CK} = \mathrm{E}$, on a :

$$\mathrm{R} \sin.\,\theta = (\mathrm{R} \cos.\,\theta - \mathrm{E}) \operatorname{tang.} \mathrm{B} \text{ ou } \operatorname{tang.} \mathrm{B} = \frac{\mathrm{R} \sin.\,\theta}{\mathrm{R} \cos.\,\theta - \mathrm{E}};$$

d'où l'on pourra déduire la valeur de CPK correspondant à une position déterminée de CP.

En altérant la direction de la rainure, ou la faisant courbe, on obtient d'autres rapports de vitesse qui varient évidemment avec la forme de la rainure.

2° AXES NON PARALLÈLES.

244. La transmission du mouvement entre deux axes non parallèles offre des difficultés plus grandes dans la pratique, lorsque le rapport des vitesses est variable suivant une loi donnée que lorsqu'il est constant. Déjà, dans ce cas, nous avons vu qu'on était obligé d'abandonner plusieurs des solutions théoriques, à cause de la difficulté de leur application. A plus forte raison dans le cas qui nous occupe en sera-t-il ainsi, et trouvera-t-on avantage à substituer à la solution directe, celle obtenue à l'aide d'un organe intermédiaire, en ramenant le problème à la communication du mouvement entre deux axes parallèles à l'aide d'une roue d'angle; ainsi nous n'aurons pas à nous étendre beaucoup sur le cas actuel.

Organes agissant par contact immédiat.

245. 1° *Axes qui se rencontrent.* Si l'on trace, dans deux plans perpendiculaires aux deux axes, deux ellipses se touchant en un point et ayant les axes pour centres, qui se mèneraient par roulement suivant le rapport de vitesse voulu; que de plus, on décrive les deux cônes ayant pour base ces deux ellipses, et pour sommet le point de rencontre des axes; ces deux cônes, en se conduisant par roulement, feront mouvoir les deux axes dans les rapports de vitesse voulus. Si on veut les armer de dents, il faudra opérer d'après les principes établis en traitant des roues coniques à base circulaire qui s'appliqueront également à ce cas; mais l'on voit que la complication du problème devient trop grande pour la pratique.

246. Nous rapporterons une ingénieuse disposition imaginée par Huyghens, pour résoudre un des cas de la question que nous traitons, celui où les deux axes se rencontrent à angle droit.

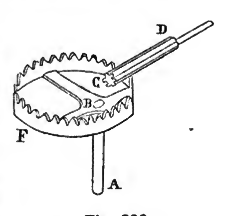


Fig. 223.

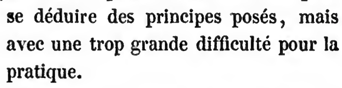
AB est un arbre à l'extrémité duquel est fixée une roue dentée F (fig. 223), dont le centre de mouvement B n'est pas au centre de la circonférence. Un long pignon D est adapté à l'axe CD qui fait un angle droit avec

l'axe AB. On voit que le rayon ρ du pignon est constant et que celui r de la roue varie pour les divers points de la circonférence, depuis sa moindre longueur r jusqu'à une longueur maximum $r + e$, e étant la valeur de l'excentricité; il en résulte que le rapport des vitesses varie de $\frac{\rho}{r}$ à $\frac{\rho}{r + e}$.

Dans la machine de Huyghens, c'est le pignon qui conduit et se meut uniformément. On pourrait de même faire partir le mouvement de la roue et aussi varier encore les rapports de vitesse en lui donnant une autre forme qu'une circonférence de cercle.

247. 2° *Axes qui ne se rencontrent pas.* On peut résoudre le problème dans toute sa généralité en raisonnant comme précédemment. En effet, divisons la plus courte distance des deux axes en deux parties qui soient deux rayons vecteurs de deux ellipses tracées chacune dans un plan perpendiculaire à chacun des axes, et telles que si elles roulaient angulairement, les deux axes tourneraient dans les rapports des vitesses angulaires voulues. Menons, comme nous l'avons vu, la droite, qui est le lieu des points dont les distances aux deux axes sont dans le même rapport que celui des deux parties en lesquelles la plus courte distance a été divisée; cette droite se mouvant en faisant toujours le même angle, avec le plan perpendiculaire sur chaque axe et avec cet axe, en suivant chaque ellipse, engendrera deux hyperboloïdes qui pourront se mener par contact, et qui auront toujours une génératrice commune, passant par le point de contact situé sur la plus courte distance.

En raisonnant de même, on verrait que la forme des dents peut



se déduire des principes posés, mais avec une trop grande difficulté pour la pratique.

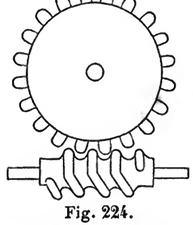


Fig. 224.

248. La vis sans fin, dans le cas où les axes sont à angle droit, fournit un moyen de varier le rapport des vitesses angulaires de la vis et de la roue; il suffit pour cela de faire varier l'inclinaison des filets de la vis (fig. 218). Le rapport des vitesses angulaires de la roue de rayon R et de la vis

sera : $\frac{A}{A_1} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{r}{R}$ tang. θ (θ étant l'angle de l'inclinaison de l'hélice sur les génératrices du cylindre, dont le rayon est r et h le pas, d'où $h = 2\pi r$ tang. θ) ; si donc on donne à la vis deux inclinaisons, comme sur la figure, il y aura deux vitesses.

Il est clair que le contact ne peut plus avoir lieu dans ce cas suivant des éléments plans. Il faudra former les dents des roues de solides de révolution ayant leurs axes rayonnant au centre de la roue ; de la sorte le contact pourra encore avoir lieu suivant une génératrice.

Organes agissant par intermédiaires.

249. **Flexibles.** 1° *Courroies.* Les courroies pouvant servir à transmettre le mouvement dans toutes les directions, pourvu qu'on les maintienne par des poulies-guides, comme nous avons vu art. 226, toute la question se réduit à munir les axes de poulies de forme convenable pour que les axes soient dans le rapport de vitesse voulue, ce qui ramène la question à celle que nous avons examinée art. 239.

250. **Rigides.** 2° *Articulations.* L'emploi des articulations fournit la solution la plus remarquable du problème qui nous occupe. Nous voulons parler du système appelé Joint de Cardan ou de Hooke, ou encore Joint universel.

Le joint universel est un mode d'assemblage de deux axes qui se rencontrent, qui permet la transmission du mouvement de rotation de l'un à l'autre ; il jouit de cette importante propriété de transmettre ce mouvement quand l'angle des deux axes vient à changer, même pendant la durée du mouvement.

La fig. 225 représente le joint brisé. Pour en concevoir le jeu, il faut remarquer que quand le mouvement de rotation est imprimé à l'arbre Aa, cet arbre entraîne avec lui la fourche ACc qui le termine, ainsi que le croisillon Cc, dont les branches ont la faculté de tourner sur leurs tourillons respectifs placés aux extrémités de la fourche ACc ; le système qui réunit l'axe Bb au croisillon Cc est semblable. Mais, comme les quatre parties du croisillon sont solidaires, ne forment qu'une seule pièce, il est évident que celles

qui servent de support aux branches de la fourche fixée à l'axe B*b*, tournent et impriment à cet axe un mouvement de rotation pour tout mouvement de l'axe A*a*.

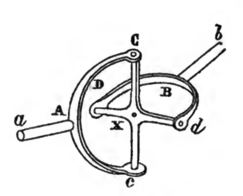


Fig. 225.

La propriété que nous avons indiqué appartenir à ce système de transmettre le mouvement de rotation, quand même l'angle des axes vient à varier, résulte bien clairement de la disposition que nous venons de décrire. En effet, un des axes peut s'incliner autour de l'autre que l'on peut toujours considérer comme fixe, par la double rotation possible autour des tourillons, c'est-à-dire autour de deux axes rectangulaires entre eux, ce qui permet d'obtenir toute inclinaison; de la possibilité de produire ces deux mouvements à angle droit, résulte la propriété énoncée.

Les deux axes étant réunis par ce système et tournant ensemble, si la vitesse de l'axe moteur, de A*a* par exemple, est uniforme, quelle sera la vitesse de l'autre axe? Le nombre de tours en un certain intervalle de temps est bien le même pour les deux axes, puisque après chaque tour les choses se trouvent dans la même place; mais quelles sont les variations de vitesse dans chaque tour? c'est ce que nous allons examiner.

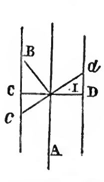


Fig. 226.

Les fourches décrivent deux cercles perpendiculaires aux axes. Si nous supposons menés les plans de ces cercles (fig. 226) CD, *cd*, ils se couperont suivant un diamètre commun passant par le centre du croisillon, et feront entre eux un angle I, supplément de celui des deux axes auxquels ils sont perpendiculaires.

Considérons le mouvement à partir du diamètre commun aux deux cercles, et supposons-y placée la fourche qui termine l'axe Aa.

L'axe Aa tournant d'un angle ω, les extrémités de la fourche ACc, dont la largeur est 2R, parcourront un chemin Rω; tout le croisillon parcourra cet angle. Mais dans le plan parcouru par les extrémités de Bb, le chemin décrit par la fourche dont la largeur est 2R′, ne sera que la projection de cet angle, ou de la rotation absolue Rω, c'est-à-dire cette longueur multipliée par le cosinus des deux plans.

En effet, supposons construit le cylindre engendré par des génératrices parallèles à l'axe Aa et passant par le cercle décrit par la fourche que porte Aa, le plan du cercle décrit par la pièce que porte Bb le coupera suivant une ellipse, et les mouvements angulaires du cylindre seront mesurés sur ce cercle pour l'axe Aa, et sur cette ellipse pour l'axe Bb, à partir du diamètre commun.

Le plan tangent au cylindre, évidemment tangent en même temps au cercle et à l'ellipse dont nous venons de parler, sera coupé par les deux plans CD, cd suivant deux tangentes à ces courbes, on aura entre les parties de ces tangentes comprises entre les mêmes plans passant par l'axe Aa et par les deux positions extrêmes du diamètre qui tourne de Rω, plans qui comprendront également pour l'axe Bb, puisque le croisillon est d'une seule pièce, le point de départ et le point extrême du diamètre commun, la relation :

$$\text{tang. } \omega = \text{tang. } \omega' \cos. \text{I} \; [1],$$

relation qui persiste évidemment, quel que soit le point à partir duquel on compte les angles, puisque toute rotation peut être regardée comme une différence de deux rotations comptées à partir du diamètre commun.

Le rayon R′ de l'ellipse variera du grand au petit axe, celui-ci étant déterminé par le diamètre commun du cylindre, et l'autre tel que $\text{R} = \text{R}' \cos. \text{I}$ ou de R à $\frac{\text{R}}{\cos. \text{I}}$. Pour des valeurs de ω et ω' très petites remplaçant les tangentes par les arcs, la relation ci-dessus devient $\text{R}\omega = \text{R}'\omega' \cos. \text{I}$ [2], ce qui pour $\text{R}' = \text{R}$ donne $\omega' = \frac{\omega}{\cos. \text{I}}$, et pour $\text{R}' \cos. \text{I} = \text{R}$, $\omega' = \omega$. Il faut remarquer que

si la vitesse croît d'un côté du diamètre commun, il faut qu'elle décroisse de l'autre, puisque les tours des deux axes se font en des temps égaux. En effet, si c'était l'axe B qui avait la vitesse uniforme, on aurait pour maximum $\omega = \frac{\omega'}{\cos. I}$ par l'effet de la liaison des axes, donc réciproquement $\omega \cos. I$ sera une limite de ω', ω étant la vitesse régulière. On doit donc conclure que ω' variera de $\omega \cos. I$ à $\frac{\omega}{\cos. I}$, et qu'un tour ayant toujours lieu en même temps pour chaque axe, la vitesse de l'axe conduit est tantôt grande, tantôt plus petite que celle de l'autre axe.

D'après l'expression approchée ci-dessus [2] :

$$\omega - \omega' = \left(1 - \frac{R}{R' \cos. I}\right) \omega,$$

expression qui devient nulle pour $I = 0$ et $\cos. I = 1$; car par construction $2R' = 2R$, les deux fourches sont égales.

Si l'angle I des deux axes approche de 90°, la rotation d'un axe tend à tordre les tourillons et nullement à faire tourner la croix, l'appareil ne peut plus servir. Bien avant cette limite, quand l'angle n'est pas bien supérieur à 90°, les frottements et les torsions qui se produisent dans cet appareil le rendent défectueux pour transmettre de grands efforts.

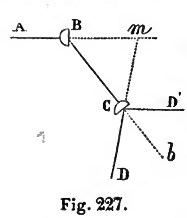


Fig. 227.

251. Au moyen de deux joints (figure 227), on peut toujours communiquer le mouvement entre deux axes disposés l'un par rapport à l'autre d'une manière quelconque et avec une grande variété de vitesses du mouvement, à l'aide d'un axe intermédiaire réunissant les deux premiers.

Soit AB l'axe conduisant, assemblé avec un second axe CB par un joint universel en B, lequel est réuni semblablement avec un autre axe CD ; le plan ABC étant différent du plan BCD. Soient α, β, γ les rotations des trois axes AB, BC, CD. Le mouvement du second joint C résultera du mouvement du pre

mier B, pour lequel on a (θ étant l'angle des deux axes AB, CB):

$$\text{tang. } \beta = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta}.$$

L'angle de rotation correspondant de CD étant γ et θ_1 son inclinaison sur BC, on a de même :

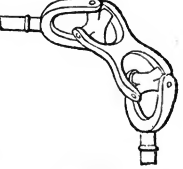
$$\text{Tang. } \gamma = \frac{\text{tang. } \beta}{\cos. \theta_1} = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta \cos. \theta_1};$$

et enfin pour des séries de joints réunissant des axes dont les inclinaisons mutuelles seraient $\theta\, \theta_1\, \theta_n$, δ étant le chemin angulairement parcouru par le dernier pour l'angle α parcouru par le premier, on aurait :

$$\text{Tang. } \delta = \frac{\text{tang. } \alpha}{\cos. \theta \cos. \theta_1 \ldots \theta_n}.$$

Dans un système de ce genre toute variation de vitesse peut être obtenue, quel que soit l'angle et la variation de direction du dernier, en employant des axes intermédiaires convenablement disposés.

252. Quand on ne peut disposer d'un axe intermédiaire, et que l'angle des deux axes est inférieur à 130°, on emploie la disposition dite double joint de Hooke. Il se compose de deux joints dont la la réunion permet la transmission dù mouvement, quel que soit l'angle des deux axes (fig. 228).


Fig. 228.

Ce joint constitue en réalité une bielle articulée à l'extrémité de bras de levier égaux représentés par les croisillons et ayant un mouvement de rotation par rapport à l'axe avec lequel ils sont assemblés. Cette bielle communiquera à deux axes parallèles, ou qui se rencontreront, une rotation égale en chaque instant, comme l'indique la symétrie de la figure, si l'on a soin de faire en sorte que les deux axes fassent le même angle avec la pièce intermédiaire.

Des rapports de vitesse extrêmement complexes peuvent être obtenus en faisant inégaux les leviers de chaque axe, et les faisant se couper dans chaque croix sous divers angles. De semblables dispositions ne sont d'aucun usage dans la pratique.

II.

MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU.

253. Le mouvement circulaire continu est produit par le système tour, le mouvement rectiligne par le système plan ; les organes qui serviront à la transformation indiquée consisteront donc en des dispositions permettant d'établir la communication entre deux de ces systèmes.

Il faut remarquer de plus que la ligne droite pouvant être considérée comme la circonférence d'un cercle de rayon infini, le problème se réduit à celui étudié dans le chapitre qui précède, en introduisant dans les solutions trouvées quelques modifications qui résultent de cette nouvelle condition. Remarquons aussi que les deux mouvements n'étant plus de même nature, il y aura lieu d'étudier dans chaque cas le mouvement réciproque, de déterminer quand il sera possible avec le même organe, c'est-à-dire le cas où le mouvement initial partira du système tour et celui où il partira du système plan.

1re *Section*. — Rapport de vitesse constant.

1° DIRECTION DU MOUVEMENT RECTILIGNE DANS LE PLAN DU MOUVEMENT CIRCULAIRE.

(Cas correspondant à celui des axes parallèles pour la transformation du mouvement circulaire continu en circulaire continu.)

Organes agissant par contact immédiat et à frottement de roulement.

254. Si par la droite BC (fig. 229), direction du mouvement rectiligne, on mène un plan perpendiculaire à l'axe A de rotation, et qu'avec la perpendiculaire AD, abaissée du point A sur BC, on décrive un cercle, il est évident que si l'adhérence était suffisante au point de contact, le cercle pourrait mener la droite

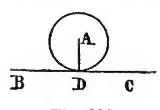


Fig. 229.

sans glissement, c'est-à-dire de manière que des longueurs égales

de la droite et du cercle passeraient au point de contact; semblablement la droite pourrait conduire le cercle. Si l est la longueur de la droite qui doit passer au point de contact pour une rotation ω de l'axe, le problème sera résolu si on a $R\omega = l$, ou si l'on place la ligne B C à la distance R de l'axe A.

Le problème à résoudre est donc absolument le même que celui des engrenages. Comment armer de dents la roue dont l'axe est maintenu entre des coussinets et la barre maintenue par des guides de manière à ne pouvoir se mouvoir dans le sens de sa longueur, pour que le mouvement ait lieu comme s'il y avait roulement, les vitesses linéaires au point de contact étant les mêmes? Tel est le système appelé *crémaillère* représenté fig. 230.

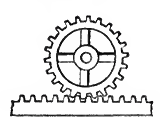


Fig. 230.

Les divers systèmes d'engrenages devront donner un nombre égal de systèmes de crémaillères; il en sera de même des systèmes à frottement de roulement.

255. *Crémaillères à frottement de roulement.* On peut évidemment construire une crémaillère à frottement de roulement par les mêmes principes qui ont servi à établir des engrenages de cette nature. Ainsi, si dans le plan tangent au cylindre de la roue qui se confond avec la face supérieure de la barre, on mène une droite inclinée sur les génératrices du cylindre; qu'on enroule le plan autour de celui-ci et qu'on l'applique sur la barre, la droite indiquera la forme des dents, qui seront des droites obliques sur la barre, des hélices sur le cylindre; ces dents se conduiront en se touchant par des points situés dans des plans successifs, et par suite seulement avec frottement de roulement.

Organes agissant par contact immédiat et à frottement de glissement.

256. Comme nous venons de le dire, tous les systèmes de crémaillères ne sont que des modifications des divers systèmes d'engrenages, dans le cas où le rayon des cercles devient infini. Passons en revue ces divers systèmes.

257. *Crémaillère à flancs.* Le centre de l'une des roues, la roue conduite par exemple, étant situé à l'infini, une des circonférences primitives devient une ligne droite (fig. 231), ses flancs (qu'il faut

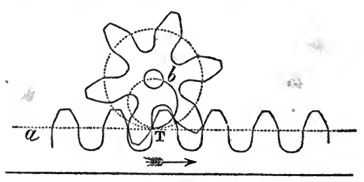


Fig. 231.

supposer terminés à la ligne aT) deviennent des plans parallèles entre eux, perpendiculaires à sa direction. Le cercle roulant extérieurement à la roue se trouve d'un rayon infini, autrement dit les dents deviennent des développantes de la circonférence, puisque le cercle décrivant l'épicycloïde dans le cas des roues devient une ligne droite roulant sur le cercle primitif.

Pendant la rotation de la circonférence autour de son centre b, la droite aT lui restera constamment tangente; elle est donc constamment normale à toutes les développantes qui forment les dents; elle est donc le lieu des contacts de ces développantes avec les différents flancs, et ceux-ci ne sont donc jamais au prise que par leur élément extérieur situé sur cette ligne. La forme du reste de l'entaille, pourvu que les dents puissent s'y loger, est donc complétement arbitraire.

258. *Crémaillère avec réciprocité.* La crémaillère à flancs, telle que nous l'avons décrite plus haut, doit être conduite par la roue; inversement la crémaillère peut être armée seule de dents destinées à conduire les flancs de la roue. Les profils des dents de la crémaillère (fig. 231) sont des cycloïdes engendrées par le roulement sur la droite aT, considérée comme une circonférence primitive du cercle qui a pour diamètre le rayon de la circonférence b. Enfin la roue et la crémaillère pourront porter toutes deux à la fois des dents et des flancs, et par conséquent se mener indifféremment l'une l'autre.

Nous n'avons pas à revenir sur les questions accessoires de

l'exécution des engrenages ; ainsi l'égalité des divisions sur les deux circonférences primitives ne doit pas cesser d'avoir lieu dans le cas où l'une d'elles devient une ligne droite ; la crémaillère parcourant, dans la direction de sa longueur, des chemins égaux aux arcs décrits par la circonférence de la roue.

259. *Crémaillère à fuseaux.* De ce que le contact n'a lieu que sur une ligne dans la crémaillère à flancs, il résulte qu'à la limite d'un engrenage à lanterne, pour une barre garnie de dents se réduisant à des points placés sur la ligne tangente à la circonférence primitive, les dents de la roue menante devraient avoir les mêmes profils que l'engrenage à flancs, c'est-à-dire être formée de développantes du cercle primitif. Il en sera de même dans la pratique, c'est-à-dire lorsque la barre sera armée de fuseaux cylindriques ayant leurs centres sur la tangente, puisqu'une développante raccourcie est une développante identique à la première. Inversement

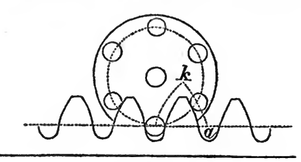


Fig. 232.

(fig. 232) on peut garnir la roue de fuseaux et la faire conduire par la crémaillère. Les dents de celle-ci seront des cycloïdes engendrées par la circonférence primitive de la roue, raccourcies suivant chaque normale d'une longueur égale au rayon des fuseaux.

260. *Crémaillère à flancs cycloïdaux* (fig. 233). On a vu que la crémaillère qui dérive de l'engrenage à flancs a cet inconvénient grave, que la développante des forces du pignon agit sur un seul point de la dent de la crémaillère.

On évite cet inconvénient en choisissant pour cercle décrivant un cercle quelconque (comme art. 176) Tkm, qui roulant sur la tangente Tn engendre des arcs cycloïdaux qui forment les flancs et les dents de la crémaillère. Le même cercle, en roulant sur la circonférence primitive BT du pignon, engendre des épicycloïdes dont le contact avec les premières courbes s'opère alors le long

d'un arc no, dont le développement sera d'autant plus petit que le diamètre du cercle décrivant sera lui-même plus grand.

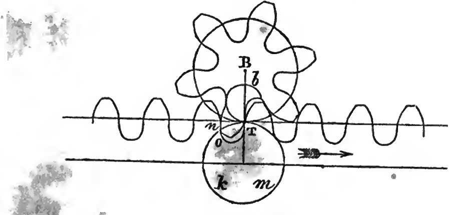


Fig. 233.

En prenant le cercle décrivant égal au cercle constant qui servirait à tracer les dents de toutes les roues d'un système de roues dentées, l'une quelconque de ces roues engrènerait avec la crémaillère.

261. *Crémaillère à dents obliques* (fig. 234). Le système d'en-

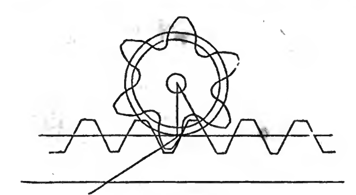


Fig. 234.

grenages à développantes fournit aussi un tracé particulier. En effet, dans le tracé de ce système d'engrenages, l'inclinaison des tangentes aux cercles intérieurs est une quantité arbitraire indépendante des rayons R, R′ des circonférences primitives. Si l'un des rayons R′ devient infini et l'une des circonférences une ligne droite, un des points de tangence aux circonférences s'éloigne à l'infini, et la développante correspondante devient une droite perpendiculaire à la tangente commune.

On obtient ainsi une crémaillère à dents obliques dont la crémaillère à flancs est un cas particulier, celui où les tangentes se confondent avec les deux circonférences primitives au point de contact. Dans ce cas, le contact n'a plus lieu que d'un côté de la

ligne des centres et la roue seule peut conduire, désavantage que n'offre pas l'engrenage que nous décrivons.

262. *Nombre des dents.* Le minimum absolu du nombre de dents que doit avoir un pignon pour conduire une crémaillère sans à-coups, est $n = 3$ et se détermine par le calcul donné art. 168. Dans la pratique on devra toujours rester au-dessus de ce nombre.

263. *Saillie des dents.* Pour la saillie des dents, nous pouvons continuer le tableau donné précédemment art. 170 et l'étendre au cas d'une crémaillère, à un nombre de dents infini pour l'une des roues.

	VALEUR DE $\frac{N_1}{N_2}$.	VALEURS DE $\frac{G_1}{G_2}$.		
		$F = 2f$.	$F = f\sqrt{2}$.	$F = f$.
La crémaillère est menée.......	zéro	2	1	0,5
La crémaillère mène.	infini.	8	4	2

264. *Frottement dans la crémaillère.* Une crémaillère étant un engrenage dans lequel le rayon d'une des circonférences primitives devient infini, l'effort moyen au point de contact étant

$$fQ\frac{a}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$$

pour tout engrenage, devient pour $R' = \infty$, $fQ\frac{a}{2R}$, qui multiplié par le chemin parcouru par un point de la circonférence primitive, donnera le travail du frottement, ou $T_f = \pi f T_r\left(\frac{1}{n}\right)$.

Organes agissant à l'aide d'intermédiaires.

Le mouvement rectiligne continu étant de sa nature indéfini, il ne peut exister d'intermédiaires entre le système tour et le système plan que des intermédiaires également indéfinis. Il n'y a donc pas à s'occuper de bielles et d'articulations nécessairement limitées; les cordes et courroies peuvent seules convenir et donnent naissance au système suivant.

INTERMÉDIAIRES FLEXIBLES. — DU TREUIL.

265. Les cordes, lorsqu'elles servent à surmonter une résistance, par exemple à élever un poids, conservent sans guide la direction rectiligne ; comme de plus leur enroulement produit un assemblage, on voit comment le *treuil*, qui consiste dans un cylindre autour duquel s'enroule la corde attachée au système qui est guidé, s'il y a lieu, de manière à se mouvoir en ligne droite, remplit le même office que les systèmes précédents. Le treuil peut être disposé, soit verticalement, soit horizontalement ; il agit le plus souvent en transformant le mouvement circulaire continu en rectiligne continu ; mais inversement, une corde enroulée autour d'un cylindre, produit en se déroulant le mouvement circulaire continu de l'arbre autour duquel elle était enroulée.

La vitesse se détermine facilement dans le treuil. R étant le rayon du bras de la manivelle motrice, r le rayon du cylindre autour duquel s'enroule la corde, on aura pour chaque tour, P étant la force motrice et Q la force résistante, comme nous l'avons vu aux préliminaires (art. 33), pour le mouvement uniforme : $2\pi RP = 2\pi r Q$, ou $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$. Pour un tour de manivelle, la corde parcourt l'espace $2\pi r$.

Comme nous l'avons dit, la flexibilité de la corde fait qu'en se déroulant elle engendre aussitôt un mouvement rectiligne, pourvu que la direction de la force, qui assure la tension de la corde, soit constante. C'est ainsi qu'une courroie de communication fournit entre les deux poulies un mouvement rectiligne ; ce système est souvent employé dans les machines-outils.

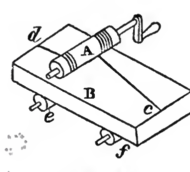


Fig. 235.

266. Nous avons supposé dans ce qui précède que la direction de la corde restait parallèle à elle-même ; il n'en est pas toujours ainsi dans les divers cas où l'on emploie le treuil. Nous prendrons pour exemple la disposition représentée dans la fig. 235.

Nous supposons qu'autour de A deux cordes s'enroulent dans

deux sens différents, et viennent s'attacher à deux points c, d des extrémités de la barre B, tels que lorsque ces points sont arrivés sous le treuil la corde soit régulièrement enroulée.

Le chemin parcouru par la barre dans un sens ou dans l'autre, suivant le sens du mouvement du treuil, serait toujours $2\pi R$ pour chaque tour de rotation de l'axe, si la direction de l'enroulement Ac était toujours parallèle à elle-même. Pour l'obtenir dans toutes les parties, il faut les rapporter à la direction cd, parallèle à la direction du mouvement de la barre.

On a alors en chaque instant :

Vitesse suivant Ac : vitesse suivant cd :: cos. Acd : 1.

En d'autres termes, on a la vitesse réelle en projetant sur la direction de la barre la vitesse estimée suivant la direction de la corde qui se déroule.

Dans le système qui précède on peut rendre le plan B fixe, et, assujettissant les coussinets de l'arbre A à glisser dans des guides rectilignes, réunir en celui-ci le mouvement de rotation et le mouvement de translation suivant la loi que nous venons d'indiquer.

Pour rendre cette vitesse de translation constante, il faudrait entailler le contour du cylindre suivant une spirale, telle que $2\pi R \times \cos. Acd$ fût une quantité constante.

Nous ne parlerons pas des résistances dans le treuil. Outre le frottement de l'axe, il faut évaluer le travail dû à la raideur des cordes, résistance très considérable lorsqu'il s'agit de poids très lourds et qui exigent l'emploi de cordes d'un fort diamètre. Nous renvoyons pour cet objet à tous les traités de mécanique.

2° DIRECTION DU MOUVEMENT RECTILIGNE, FAISANT UN ANGLE QUELCONQUE AVEC LE PLAN DU MOUVEMENT CIRCULAIRE.

(Correspond au cas d'axes non parallèles pour la transformation de circulaire continu en circulaire continu.)

Organes agissant par contact immédiat.

267. Les solutions trouvées pour le cas des engrenages entre deux axes disposés d'une manière quelconque dans l'espace, doi-

vent trouver encore leur application dans le cas où le rayon de l'une des roues devient infini.

Une des circonférences primitives, celle dont le rayon est infini, est donnée par la direction du mouvement rectiligne; si donc, comme dans la solution (art. 203), on arme cette ligne de développantes d'un rayon infini, c'est-à-dire de faces dont le profil est formé de lignes droites perpendiculaires à la direction du mouvement rectiligne, les dents de la roue dentée devront être formées par des surfaces héliçoïdales.

A mesure que la droite et l'axe du mouvement circulaire approchent du parallélisme, l'hélice s'incline et s'allonge de plus en plus si les dents sont formées de plans perpendiculaires à la direction de la droite. On est alors naturellement conduit à employer des surfaces inclinées, c'est-à-dire pour surface enveloppe et enveloppée (fig. 236), la vis et l'entaille que celle-ci peut faire dans une barre quand elle est taillée en taraud, solution qui correspond à la vis à filets triangulaires, quand on part de l'engrenage à développantes comme art. 261.

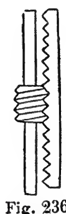


Fig. 236.

Cette disposition permet une direction oblique du mouvement rectiligne et de l'axe du mouvement circulaire, mais est surtout convenable pour des directions parallèles de l'axe et du mouvement rectiligne (correspondant au cas de deux axes de rotation à angle droit); dans ce cas il y a avantage, dans la pratique, à rendre le système plus complet comme nous allons le voir.

268. *Frottement de roulement.* Avant de passer à ce système qui constitue la solution vraiment importante dans la pratique, du problème qui nous occupe, nous ferons remarquer que les systèmes à frottement de roulement pourraient aussi fournir des solutions pour la production du mouvement rectiligne. Ainsi, si on engendre un hyperboloïde par la rotation de la ligne qui doit se mouvoir suivant sa longueur, autour de l'axe du mouvement circulaire, et qu'on trace (art. 201) sur la surface de celui-ci une développante hyperboloïdique à l'aide d'un fil faisant un angle θ constant avec

ses génératrices, il est clair que cette courbe poussera, en ne faisant naître qu'un frottement de roulement, une droite faisant un angle θ avec la direction de la crémaillère; en chaque instant une génératrice de l'hyperboloïde viendra se confondre avec la direction du mouvement rectiligne, et les deux courbes conductrices se toucher en un point. Il n'y a pas lieu d'insister sur des solutions trop complexes pour la pratique.

ANGLE DROIT. — VIS ET ÉCROU.

269. Lorsque la direction du mouvement rectiligne est parallèle à l'axe du mouvement circulaire, on emploie la vis et son écrou (fig. 237), c'est-à-dire le système précédent complété. Il consiste alors en une saillie, contournée en hélice autour d'un noyau, qui pénètre dans une cavité correspondante à la saillie. La vis prenant en même temps un mouvement de rotation autour de son axe et de translation rectiligne dans le sens de celui-ci, son extrémité communiquera ce mouvement seul à une pièce guidée qu'il viendra pousser, l'écrou de la vis étant fixe. Inversement, si la vis est guidée dans des collets de manière à ne pas pouvoir prendre de mouvement de translation, son écrou tendra à tourner avec elle, et si on empêche cette rotation par un arrêt passant dans une rainure rectiligne, ce sera alors l'écrou qui se mouvra en ligne droite.

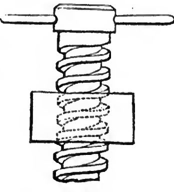


Fig. 237.

L'hélice fait toujours un angle constant avec les génératrices du cylindre; la distance constante entre deux spires de l'hélice, mesurée sur une génératrice du cylindre, est le *pas* de la vis. Ordinairement la tête de la vis est armée d'une roue, ou au moins d'une barre perpendiculaire à son axe. Si l'on désigne par R le rayon de cette roue, ou la longueur de cette barre comptée à partir du centre, le chemin parcouru en un tour complet par l'extrémité d'un rayon sera $2\pi R$; h étant le pas de la vis, cette quantité sera aussi celle dont la vis ou son écrou auront marché dans le même temps perpendiculairement à l'axe. Les chemins parcourus pendant une fraction de tour quelconque, seront évidemment dans le même

rapport que ceux qui sont parcourus pendant la durée d'un tour complet de la vis ; en nommant V la vitesse à la circonférence de la roue ou à l'extrémité de la barre, et v la vitesse de la vis ou de son écrou dans le sens de l'axe, on aura donc :

$$V : v :: 2\pi R : h, \quad v = V \frac{h}{2\pi R},$$

c'est-à-dire *la vitesse de l'extrémité de la barre, dans un plan perpendiculaire à l'axe, est à la vitesse de la vis ou de son écrou parallèlement à cet axe, comme la circonférence décrite par l'extrémité de cette barre est au pas de la vis.* Comme $\frac{h}{2\pi r} = \text{tang.}\ \alpha$, α étant l'inclinaison de l'hélice sur une perpendiculaire aux génératrices, r étant le rayon du cylindre passant par un point de cette hélice, on a pour un point quelconque : $v = V\ \text{tang.}\ \alpha$, relation indépendante du rayon du noyau cylindrique.

On voit d'après le rapport ci-dessus que l'on peut facilement construire la vis de manière à rendre la vitesse du mouvement rectiligne très petite relativement à la vitesse du mouvement circulaire, ce qui la rend convenable pour développer de très grands efforts, et la fait surtout employer dans les appareils qui doivent produire de grandes pressions, mais en occasionnant des pertes de travail considérables par les frottements.

270. *Frottement dans la vis.* Il importe de prendre une idée exacte de la valeur de ces pertes de travail, pour ne pas appliquer la vis dans des cas où son emploi ne serait pas convenable, et proportionner l'inclinaison du filet de la vis aux circonstances de l'emploi de cet organe (1).

Soit A B (fig. 238) l'axe supposé vertical d'une vis à filets carrés, destinée à soulever un poids Q par l'intermédiaire d'une force horizontale p appliquée à l'extrémité du levier R, l'écrou $abcd$ étant fixe. On peut toujours supposer que la charge Q soit distribuée uniformément sur un certain filet héliçoïde de la vis et de l'écrou, que nous nommons *filet moyen*, et s'y trouve posée comme sur un

(1) Nous empruntons ce calcul à M. Poncelet ; nos lecteurs auront facilement reconnu que cet emprunt n'est pas le seul que nous ayons fait, dans le cours de notre ouvrage, à cet illustre savant.

plan incliné formant avec l'horizon un angle égal à celui des plans tangents à ce filet. Pour le frottement, les choses se passent comme s'il en était ainsi ; la pression s'exerçant en plusieurs points, suivant

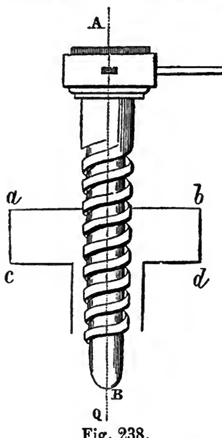


Fig. 238.

une même génératrice de la surface, causera le même frottement que la somme des pressions sur le filet moyen, le frottement étant proportionnel à la pression. Nommant donc :

r, le rayon du cylindre qui contient l'hélice ou filet moyen dont il s'agit ;

p, la force horizontale tangente à ce cylindre, qui serait capable de vaincre le poids Q et les frottements qui en résultent sur la surface du filet moyen ;

h, la hauteur du pas de la vis ou de l'écrou ;

$\pi = 3,1415$, le rapport de la circonférence au diamètre ;

α, l'angle de l'inclinaison constante du filet moyen à l'horizon ;

f, le coefficient de frottement pour les substances en contact ;

On aura, d'après le n° 49 :

$p = Q \frac{\text{tang. } \alpha + f}{1 - f \text{ tang. } \alpha} = Q \frac{h + 2\pi f r}{2\pi r - fh}$, en remplaçant tang. α par sa valeur $\frac{h}{2\pi r}$.

La valeur ci-dessus de p peut se mettre sous la forme :

$$p = Q \text{ tang. } \alpha + fQ \frac{1 + \text{tang.}^2\alpha}{1 - f \text{ tang. } \alpha} = Q \frac{h}{2\pi r} + fQ \frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r(2\pi r - fh)}$$

(en ajoutant Q tang. α et retranchant Q tang. α de la fraction), on voit que la portion de p employée à vaincre le frottement, a pour expression :

$$fQ \frac{1 + \text{tang.}^2\alpha}{1 - f \text{ tang. } \alpha},$$

dont la valeur croît progressivement avec tang. α jusqu'à devenir infinie quand tang. $\alpha = \frac{1}{f}$, limite passé laquelle la puissance horizontale ne peut plus faire mouvoir la vis en l'élevant le long des filets de l'écrou.

Il semblerait, d'après cela, qu'il dut y avoir en général de l'avantage à diminuer l'angle d'inclinaison α des hélices ; mais on arrivera à une conséquence toute opposée, si l'on remarque que le rapport de la quantité de travail utilisé qui est $Qr\omega$ tang. α, à celle dépensée $Qr\omega \frac{\text{tang. } \alpha + f}{1 - f \text{ tang. } \alpha}$, peut être mis sous la forme :

$$\frac{\text{tang. } \alpha\,(1 - f \text{ tang. } \alpha)}{\text{tang. } \alpha + f} = \frac{\sin. 2\alpha - f(1 - \cos. 2\alpha)}{\sin. 2\alpha + f(1 + \cos. 2\alpha)}$$

$$= 1 - \frac{2f}{\sin. 2\alpha + f(1 + \cos. 2\alpha)},$$

rapport dont le minimum répond à tang. $2\alpha = \frac{1}{f}$.

Pour apprécier le frottement supposons, par exemple, $f = 0,12$, qui convient au cas où l'écrou serait en cuivre et la vis en fer, les surfaces étant onctueuses ; tang. $\alpha = \frac{1}{25}$ comme dans les pressoirs à vis, le rapport ci-dessus deviendra 0,249. Dans ce cas le travail dépensé par la puissance pour élever la charge Q, serait donc presque quadruple de celui qui répond à l'effet utile.

Si tang. α était égal à $\frac{1}{4}$, le même rapport deviendrait 0,655. Ces résultats mettent en évidence l'énorme influence exercée par le frottement des vis et des écrous.

On conclut aussi de ce qui a été dit pour le cas du plan incliné, que si tang. α est moindre que f, la vis non seulement ne tendra pas à descendre d'elle-même ou à se desserrer sous l'effort qu'elle supporte, mais encore exigera pour être entraînée par la puissance p supposée agir en sens contraire de ce qu'elle faisait précédemment, ce qui doit faire changer son signe comme celui de f, un effort mesuré par :

$$p = Q\,\frac{f - \text{tang. }\alpha}{1 + f\,\text{tang. }\alpha} = f\,Q\,\frac{1 + \text{tang. }\alpha}{1 + f\,\text{tang. }\alpha} - Q\,\text{tang. }\alpha.$$

Ce cas est précisément celui des boulons d'assemblage qui doivent maintenir l'état de compression de certains corps, après que la puissance a exercé son action sur la vis ou l'écrou, et dont les parties filetées sont formées de filets très inclinés sur l'axe.

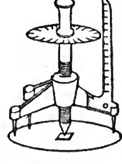
On sait qu'il en est tout autrement des vis de balancier à découper ou à battre la monnaie, qui portent des filets doubles ou triples, afin de leur procurer une résistance suffisante, tout en donnant à leurs hélices moyennes une grande inclinaison sur l'axe.

Quelquefois, d'ailleurs, il arrive, même pour des vis où la relation tang. $\alpha < f$ est satisfaite, que les secousses ou vibrations éprouvées par les boulons d'assemblage font desserrer les écrous, ce qui exige qu'on s'oppose à cet effet en plaçant deux écrous l'un sur l'autre, ou mettant directement obstacle au mouvement de l'écrou simple par un moyen facile à imaginer.

271. *Emploi de la vis pour diviser.* La propriété de l'hélice de fournir des abcisses circulaires proportionnelles aux ordonnées rectilignes du mouvement en ligne droite, et de grandeur bien plus considérable, rend la vis extrêmement précieuse pour apprécier de petites longueurs; aussi est-elle la base des organes servant à opérer des divisions. Le pas de la vis pouvant être très fin et correspondant à un tour entier de la couronne circulaire qu'on peut monter sur sa tête, on peut, pour un très petit mouvement dans le sens de l'axe, obtenir un mouvement de rotation très sensible sur cette couronne.

C'est sur ce principe que repose le sphéromètre, qui sert à mesurer les épaisseurs, représenté figure 239, et la machine à diviser les lignes droites dans lesquelles la vis pousse un traçoir.

Pour les diviseurs des couronnes circulaires, on emploie la vis (fig. 240) comme vis sans fin; elle agit comme ci-dessus sauf qu'elle sert à transformer le mouvement circulaire en circulaire.



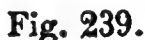


Fig. 239.

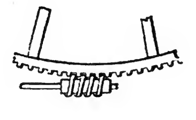


Fig. 240.

La vis conduit un plateau dont la circonférence est divisée en un grand nombre de dents; chaque tour de la vis faisant tourner le plateau d'une dent, comme on peut facilement mesurer la centième partie de la circonférence de la couronne montée sur la tête de la vis, on voit que si le pas de la roue est de 1 millimètre, on pourra apprécier facilement le 1/100e de millimètre.

Il est facile de voir que l'on peut, au moyen d'une semblable machine, soit tracer les rayons d'un cercle divisé, soit pointer sur une autre plate-forme des trous correspondants à un grand nombre de divisions, plates-formes qui sont la base des machines servant, dans les ateliers de construction, pour diviser les roues dentées.

Soit à tracer la division en 101 parties d'une circonférence, supposons que la roue porte 10000 dents et la couronne placée sur la tête de la vis 100 divisions; divisant 1000000 par le nombre 101, on trouve 9901. Chaque division correspond donc à 99 tours de la couronne circulaire montée sur la tête de la vis, plus 0,01 de tour ou une division qui s'appréciera avec la plus grande facilité.

272. La propriété de la vis de fournir de grands angles pour un petit mouvement rectiligne appartient au plan incliné qui forme le filet de la vis en s'enroulant autour du noyau, et dont la base se trouve très grande relativement à la hauteur. Le plan incliné pourra donc servir également de base à des machines à diviser. C'est ainsi que M. Decoster a appliqué dernièrement avec succès le principe de la répétition à une combinaison nou-

velle de semblables machines. Son système (fig. 241) repose sur l'emploi de blocs composés sur la jante d'une roue et pouvant s'écarter (et par suite la remplir en étant en nombre moindre) au moyen de cales aiguës formant coin, qui s'intercalent entre ces blocs et sont mues simultanément par une couronne concentrique à la roue. L'heureuse application du principe de répétition sur la circonférence même d'une grande étendue de ce diviseur universel, doit permettre d'obtenir une grande précision à l'aide de cet outil pour la division de cercles, toujours dans la pratique d'un bien moindre diamètre que le diviseur.

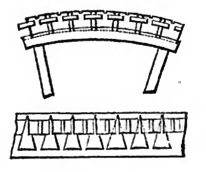


Fig. 241.

273. *Intermédiaires*. Les cordes ne pouvant s'enrouler convenablement sur le treuil qu'autant que leur direction est sensiblement perpendiculaire à l'axe de rotation, on voit que pour toute autre direction ce système exigera l'emploi bien simple d'une poulie-guide, pour ramener dans cette direction la corde qui joindrait le point d'enroulement à la résistance à surmonter.

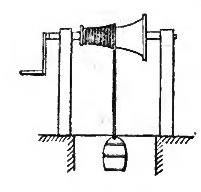
2me *Section*. — Rapport de vitesse variable.

274. Si le rapport de la vitesse du mouvement rectiligne et de la vitesse angulaire du mouvement de rotation ne doit pas être constant, comment devront être modifiés les systèmes que nous venons d'exposer?

Au lieu d'employer une crémaillère semblable à celles décrites, on pourrait employer une crémaillère en échelons menée par une roue elliptique, à une ou plusieurs saillies; les vitesses seraient en raison des rayons vecteurs au point de contact.

Des parties de vis et d'écrous à diamètres croissants pourraient aussi fournir certaines variations de vitesse, mais ces dispositions sont peu applicables.

275. Les cordes et courroies, à l'aide du système treuil, fournissent


Fig. 242.

d'excellentes solutions de la transmission du mouvement circulaire en mouvement rectiligne avec variation dans le rapport des vitesses.

Il est clair que si on entaille sur le cylindre une spirale, si on remplace la surface cylindrique par une surface quelconque, par exemple par une surface conique comme fig. 242, la longueur de la corde enroulée sera, pour chaque tour, égale à celle d'une section de la surface et variera avec celle-ci. Inversement la vitesse uniforme de la corde produirait une vitesse variable de rotation de l'axe.

Ce système peut permettre de faire mouvoir en même temps deux points en ligne droite avec des vitesses différentes et variables.

A*a* est l'axe de la fusée (fig. 243) (car ce système est évidemment de la même nature que celui exposé sous ce nom) sur laquelle sont assemblées les extrémités de deux cordes qui après s'être enroulées sur sa surface sortent toutes deux dans des directions

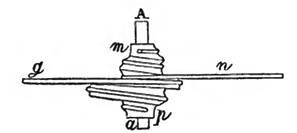


Fig. 243.

opposées et parallèles. Quand la fusée tourne, l'une des cordes s'enroule pendant que l'autre se déroule. Si donc l'axe tourne avec une vitesse constante, pour chaque tour et, par suite, en un même temps, l'enroulement est $2\pi R$ pour l'une, le déroulement $2\pi r$ pour l'autre. Le mouvement de chaque extrémité de la corde, pour un angle ω décrit par l'axe, est donc $2\pi R\omega$ pour l'une, $2\pi r\omega$ pour l'autre, c'est-à-dire variable avec le rayon des sections du cône spiral.

Nous verrons plus loin comment ce système permet de faire mouvoir en ligne droite l'axe lui-même.

III.

MOUVEMENT RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU.

276. Le mouvement rectiligne étant produit par le système plan, ne pouvant naître qu'avec des guides plans, les organes pouvant fournir la transformation indiquée consistent dans des dispositions permettant l'action mutuelle de systèmes de cette nature.

Comme il n'y a pas de roulement possible entre des systèmes à mouvement rectiligne, on voit que les organes à contact immédiat seront tous à glissement, qu'il ne peut exister de transformation directe à frottement de roulement. C'est à cause des frottements considérables qui se produisent dans ces moyens directs de transformation, qu'on préfère presque toujours les transformations indirectes, c'est-à-dire en passant par des transformations intermédiaires, et notamment par le mouvement circulaire continu, dont nous avons reconnu les avantages.

Les systèmes qui agissent à l'aide d'organes intermédiaires se réduisent aux cordes et courroies, les articulations ne pouvant fournir qu'un moyen d'assemblage entre deux mouvements rectilignes indéfinis et ne pouvant fournir de véritable transformation.

Nous ne nous occuperons guère dans ce qui va suivre que des organes qui transforment le mouvement dans un rapport de vitesse constant, les seuls qu'on rencontre dans les machines; nous indiquerons en passant comment ceux-ci devraient être modifiés pour fournir un rapport de vitesse variable.

1° Organes agissant par contact immédiat.

277. Quand les deux mouvements rectilignes sont de directions parallèles et de même vitesse, il n'y a plus de transformation à opérer, il n'y a plus qu'une simple communication qui s'effectue par tout assemblage de pièces rigides.

Dans le cas où les directions ne sont pas parallèles ou quand les vitesses diffèrent, la solution directe du problème de la communication d'un mouvement rectiligne entre deux pièces du système plan, consiste à faire pousser l'une des pièces par l'extrémité

plane de l'autre, disposée sous une inclinaison convenable; dans le système de plan incliné mobile connu sous le nom de *coin*. Le mouvement rectiligne de ce coin pourra engendrer directement le mouvement rectiligne d'une manière très directe et très simple mais inacceptable si ce n'est dans quelques cas particuliers, à cause des frottements considérables qui se produisent dans le système. Mais voyons d'abord les rapports de vitesse entre les deux pièces en mouvement dans les divers cas qui peuvent se présenter; nous verrons ensuite, par l'estimation du frottement dans un cas plus simple, quelle est la valeur de cette transformation directe.

278. *Mouvements rectilignes à angle droit.* Soit B une pièce prismatique se mouvant entre deux guides, et A une barre également guidée à angle droit sur la première, à laquelle il s'agit de communiquer le mouvement rectiligne de celle-ci (fig. 244). Terminons B par un coin rectangle s'appliquant sur le plan CD, par un des côtés de l'angle droit, a étant l'angle du côté du coin. Le mouvement se communiquera ainsi qu'il est proposé de la barre B à la barre A, et en appelant E le chemin parcouru par B, e celui parcouru par A, on a : $E = e$ tang. a, comme on le voit, en construisant le petit triangle parallèle aux directions de A et B, ayant pour longueurs les chemins parcourus E et e.

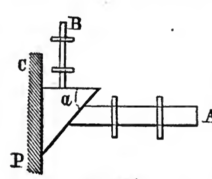


Fig. 244.

Lorsque B peut avoir sans inconvénient un double mouvement rectiligne, suivant sa longueur et perpendiculairement à celle-ci,

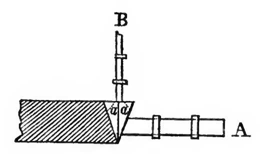


Fig. 245.

on emploie le système représenté fig. 245, qui diffère du précédent en ce que le coin rectangulaire est remplacé par un coin isocèle.

Dans ce cas, la relation précédente entre les chemins parcourus suivant A et B devient $E = \frac{1}{2} e$ tang. a.

279. Dans la pratique, l'angle a est toujours voisin d'un angle droit, l'angle au sommet du coin est aigu; tang. a est donc toujours grand, et le rapport $\frac{E}{e}$ considérable. Comme dans tous les cas semblables, le mouvement réciproque du précédent ne peut jamais avoir lieu qu'avec de très grands efforts appliqués à la barre A, relativement à ceux appliqués à la barre B pour une même quantité de travail, les efforts étant en raison inverse des chemins parcourus. Mais, comme la barre A fait avec la normale à la face qu'elle rencontre un angle égal à $90° - a$, à la moitié de l'angle au sommet, angle très petit, et généralement plus petit que celui de la résultante de la réaction du corps (art. 48), le mouvement de la barre B à l'aide de la barre A est le plus souvent *impossible*

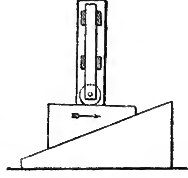


Fig. 246.

Au lieu d'agir avec la face oblique du coin sur la barre A ou mieux sur le galet qui la termine, on peut employer le système de deux plans inclinés (figure 246), dont un, agissant rectangulairement sur la barre A, est maintenu dans des coulisses de manière à ne pouvoir que s'élever comme celle-ci. Ce n'est qu'une autre manière de disposer les choses.

280. *Mouvements rectilignes dans un même plan, faisant*

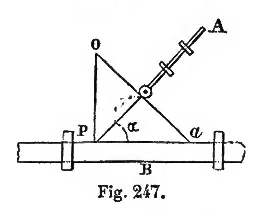


Fig. 247.

un angle α. La barre A fait avec la barre motrice B un angle α (fig. 247); si l'on adapte à celle-ci un plan incliné, un coin dont la surface soit perpendiculaire à la barre A (dont on a soin de munir

l'extrémité d'un galet), qui fait par conséquent avec la barre B un angle égal à 90° — α, le mouvement se communiquera comme dans le premier cas, et l'on trouvera de même : E cos. $\alpha = e$.

281. Si on ne pouvait disposer de l'extrémité de la barre du plan incliné pour faire agir le coin sur cette partie, il faudrait employer une rainure recevant une cheville adaptée à l'autre pièce, comme le représente la figure 248.

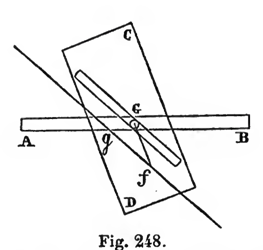


Fig. 248.

Soit un plan CD se mouvant parallèlement à lui-même et suivant son grand côté, que dans ce plan soit pratiquée une rainure faisant un angle θ avec ce côté; soit une barre AB ne pouvant se mouvoir que dans le sens de sa longueur, parallèle au plan, et à laquelle est adaptée une cheville G qui entre dans la rainure; appelons α l'angle que forme cette rainure avec la direction de la barre; les directions des mouvements du plan et de la barre font ensemble un angle $\theta + \alpha$.

Si le plan parcourt l'espace Gf, traçant gf parallèle à la rainure, le point g de rencontre de cette parallèle et de la barre sera la nouvelle position de la cheville et Gg le chemin parcouru par AB; on aura donc, en appelant E la vitesse du plan et e celle de la barre :

$$\frac{E}{e} = \frac{Gf}{Gg} = \frac{\sin. Ggf}{\sin. Gfg} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. \theta}.$$

rapport constant.

Si la barre se meut perpendiculairement à la direction du mouvement du plan, on a :

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{E}{e} = \text{tang. } \alpha$$

(comme art. 275). Si on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$, comme art 277, sin. $\alpha = 1$, le rapport devient E sin. $\theta = e$ et est le même que celui trouvé ci-dessus, puisque l'angle θ que nous considérons ici est celui de la direction de la barre et de la face du coin, est par suite complémentaire de celui des directions des deux droites.

282. *Mouvements rectilignes dans deux plans différents.* Lorsque les barres ne sont pas dans le même plan, on peut encore employer le système représenté fig. 247, c'est-à-dire un coin adapté à la barre B et dont la face serait perpendiculaire à la barre A ; alors le galet de l'extrémité de la barre A ne parcourra plus la ligne de pente du plan incliné, la ligne perpendiculaire aux arêtes parallèles du coin, mais la ligne oblique qu'on obtiendra par l'intersection du plan incliné et d'un plan mené par l'axe A parallèlement à l'axe B, le point de contact appartenant toujours à la barre A et étant en chaque instant sur une parallèle à la direction de B, suivant laquelle le mouvement du plan est produit.

On peut aussi employer le système représenté fig. 246, augmenté d'un autre plan incliné dont la face est perpendiculaire sur la seconde barre, qui est fixé sur le plan mobile et fait corps avec

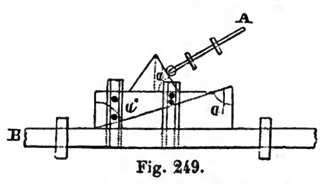


Fig. 249.

lui (fig. 249). A l'aide de deux plans inclinés, on change ainsi deux fois la direction du mouvement.

On aura, pour la première transformation, E $= e'$ tang. a' ; par a deuxième, e' sin. $a = e$, ou enfin $E = e \frac{\text{tang.}\, a'}{\text{sin.}\, a}$ entre les chemins E et e parcourus par les deux barres, a, a' étant les angles des coins, des plans inclinés. En faisant $a = a'$, ce qu'on peut toujours faire, on a : E cos $a = e$, a étant le complément de l'angle des deux directions des mouvements.

283. *Rapport de vitesses variable.* Nous avons supposé dans

ce qui précède qu'il s'agissait toujours de produire des mouvements rectilignes uniformes; on pourrait évidemment les obtenir variés suivant certaines lois en employant, au lieu de plans, des surfaces courbes de forme convenable pour transmettre le mouvement; mais il n'y a pas lieu à trop s'arrêter sur un mode de communication qui, ainsi que nous l'avons déjà dit, doit être évité, à cause des frottements énormes qu'il engendre.

284. *Frottement.* Nous avons dit que le frottement était toujours de glissement, et par suite très considérable; il peut être calculé par les principes déjà établis. Faisons-en une application au frottement qui se produit sur les faces du coin (auquel il faudrait ajouter dans le cas des barres celui qui se produit dans les guides de celles-ci) pour le cas le plus simple, celui du coin isocèle.

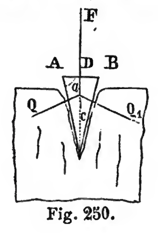


Fig. 250.

En ne tenant pas compte du frottement dans le coin (fig. 250), les réactions des résistances qui agissent sur les faces du coin étant perpendiculaires à celles-ci, et égales puisque le coin est isocèle, on aura pour l'équilibre, entre la force appliquée sur la tête du coin ABC et les résistances Q des faces :

$$F : Q :: AB : AC \text{ ou } F = Q\,\frac{AB}{AC}.$$

Les réactions Q donnent lieu de chaque côté à deux frottements égaux exprimés par fQ, qui agissent le long des côtés du coin, et résistent à l'action de la force F par une résultante dirigée suivant CD, égales par conséquent à $2fQ\,\frac{CD}{AC}$, ce qui donne pour l'équilibre : $F = Q\,\frac{AB}{AC} + 2fQ\,\frac{CD}{AC}$.

Soit un coin en fer employé à fendre du bois, $f = 0{,}62$, et soit $Q = 500^k$, $AB = \frac{1}{12}\,AC$, $\frac{CD}{AC}$ devient sensiblement égal à 1, on aura $F = 500 \times \frac{1}{12} + 2 \times 0{,}62 \times 500 = 661{,}67$, tandis que, s'il n'y avait pas de frottement $F = Q \times \frac{AB}{AC} = 41{,}67$, c'est-à-dire

que la force à appliquer pour surmonter la même résistance serait environ seize fois plus grande que celle nécessaire, s'il n'y avait pas de frottement.

Sans nous arrêter à ce cas exceptionnel, pour lequel le coefficient du frottement est très fort, nous pouvons conclure de ce seul exemple, le principe établi en commençant, c'est qu'à moins de circonstances toutes spéciales, de semblables systèmes ne doivent jamais être employés comme moyens de transmettre le mouvement, pour peu surtout que des forces quelque peu considérables soient en jeu.

2° Organes agissant par intermédiaires flexibles.

285. Les cordes et poulies sont fréquemment employées pour modifier la direction et la vitesse du mouvement rectiligne, car c'est à cela que se réduit la communication du mouvement qui nous occupe, puisque le mouvement ne change pas de nature.

La poulie est comme on sait un cylindre généralement en bois sur lequel passe une corde. Les éléments de celle-ci sont successivement courbés suivant des éléments circulaires, puis reprennent la direction rectiligne. Après avoir fait partie d'un système circulaire, pendant quelques instants la corde agit en le quittant dans une direction différente de la première.

286. *Poulie fixe. — Directions situées dans un même plan.* C'est à l'aide d'une poulie dont l'axe est suspendu à un point fixe que l'on peut obtenir tous les changements de direction, transformer un mouvement rectiligne continu en un autre mouvement rectiligne continu de même vitesse, dont la seconde direction fait un angle quelconque avec la première.

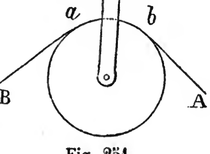


Fig. 251.

Soit (fig. 251) une poulie sur laquelle passe une corde. Si l'extrémité A s'avance d'une certaine quantité, puisque la longueur de la corde est invariable, l'extrémité B s'avancera d'une même quantité en sens contraire, la direction seule du mouvement sera changée.

Si les cordons sont parallèles, auquel cas le contact de la corde

et de la poulie a lieu sur la moitié de la circonférence de celle-ci, le mouvement des deux cordons est parallèle et de sens contraire. Donc, à l'aide d'une poulie on peut toujours changer la direction d'un mouvement rectiligne en une autre direction parallèle, ou rencontrant la première. Le sens de ce mouvement est opposé; mais avec une seconde poulie ce sens peut être changé de nouveau, s'il est nécessaire.

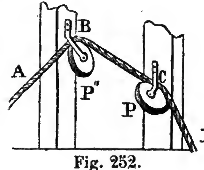


Fig. 252.

287. *Directions situées dans deux plans différents.* En employant deux poulies fixes, on peut changer le mouvement rectiligne qui a lieu suivant une droite BA (figure 252) en un autre mouvement rectiligne ayant lieu suivant une droite quelconque CD, qui ne serait pas dans un même plan avec la première. Pour cela, on joint par une droite BC deux points quelconques pris sur les deux directions données. On dispose une première poulie P de manière que son axe soit perpendiculaire au plan ABC, on dispose ensuite une seconde poulie P′ de manière que son axe soit perpendiculaire au plan BCD. Une corde passant sur les deux poulies fournira, grâce à sa flexibilité en tous sens, le changement de direction voulu.

288. *Changement de vitesse.* Lorsqu'on veut modifier à la fois la direction et la vitesse du mouvement, on peut faire usage de la poulie mobile, c'est-à-dire qui repose sur la corde par son contour et dont l'axe peut se déplacer.

Dans la poulie mobile, l'une des extrémités de la corde est fixée en un point A (fig. 253), la poulie repose sur la corde et à sa chape est suspendu d'ordinaire un poids qu'il s'agit d'élever, est attachée la résistance qu'il s'agit de surmonter. Dans le cas de la fig. 253, où les cordons *a*A, *b*B sont parallèles, et c'est le plus fréquent, on voit que si l'extrémité B s'élève de la quantité BB′, le point C, où le poids est suspendu, s'élevera aussi verticalement d'une certaine quantité CC′.



Fig. 253.

Or, quand le point B sera parvenu en B′, la portion de la corde soutenant la poulie, comprise entre le point A et le point B fixe dans l'espace, se sera raccourcie de la quantité BB′, mais ce raccourcissement se répartissant également sur les deux cordons parallèles *a*A et *b*B, chacun d'eux ne se sera raccourci que de la moitié de BB′ et la poulie, par suite le point C, ne se seront élevés verticalement que d'une quantité égale à cette moitié. Ainsi $CC' = \frac{1}{2}BB'$. La vitesse du point C sera donc moitié de celle du point B, puisque dans le même temps il aura parcouru un espace moitié moindre.

289. *Moufles*. On obtient un rapport quelconque de vitesse par la répétition d'éléments semblables, qui constitue une moufle. Celle-ci se compose d'un système de poulies fixes P P′ P″, dont les axes sont supportés par une pièce fixe appelée chape, qui se réduit souvent à une seule fourche qui supporte l'axe commun (fig. 254); d'un second système Q, Q′, Q″ de poulies mobiles réunies dans une même chape mobile, à laquelle est suspendue la résistance à vaincre qui est habituellement un poids à soulever, qui pourrait être une barre guidée en ligne droite. La corde, fixée par une de ses extrémités à la chape fixe, passe alternativement sur une poulie de chaque système dans l'ordre Q, P, Q′, P′, Q″, et P″.



Fig. 254.

Le second système pourrait avoir une poulie de moins que le premier; dans ce cas, le point d'attache serait à la chape mobile pour que toutes les poulies puissent servir.

Lorsque l'extrémité A de la corde s'abaisse verticalement de la quantité AA′, le point B où le poids est suspendu s'élève de la quantité BB′, qui est égale au quotient de AA′ par le nombre des cordons. En effet, quand le point A sera parvenu en A′, la portion de la corde comprise entre le point d'attache et le point géométrique A fixe dans l'espace, se sera raccourcie de la quantité AA′; mais ce raccourcissement étant répété également sur tous les cordons à cause de la symétrie de la figure, et la distance des

poulies entre elles ne changeant pas dans chaque système, le mouvement d'un point de chacun d'eux sera égal au quotient de A A′ par leur nombre. La chape mobile et, par suite, le point B se seront donc élevés d'une quantité égale à ce quotient. Donc n étant le nombre des cordons, on a $BB' = \frac{AA'}{n}$. La vitesse du point B est donc n fois moindre que celle du point A, puisque dans le même temps il parcourt un espace n fois moindre.

Donc enfin, avec un système de poulies, on peut toujours transformer un mouvement rectiligne donné en un autre mouvement rectiligne de direction quelconque, et dont la vitesse est dans un rapport quelconque avec celle du premier. Disons toutefois que les résistances dues à la raideur des cordes rendent ce système peu avantageux dans la pratique.

290. White a inventé un système de moufle particulier, dans lequel toutes les poulies supportées par la chape fixe tournent autour d'un seul axe avec lequel elles font corps. Dans la disposition de la fig. 255, les cordons 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6 se meuvent avec la même vitesse, mais dans des directions opposées; 1, 3 et 5 en montant, 2, 4, 6 en descendant, en supposant que le poids W se meuve de bas en haut et *vice versâ*. D'ailleurs les vitesses de chacune des paires de cordons sont différentes : la vitesse de 1 est égale à celle du système inférieur W; 3, extrémité du brin 1, 2, 3, forme avec les deux autres une moufle dans laquelle $n = 3$, et par suite la vitesse de ce brin est triple de celle de W. Semblablement, les cordons 1 et 5 forment une moufle dans laquelle $n = 5$, et ainsi de suite. Les vitesses des brins en partant du centre sont donc en progression arithmétique 1, 2, 3.... en supposant que la vitesse de W soit l'unité; et si l'extrémité de la

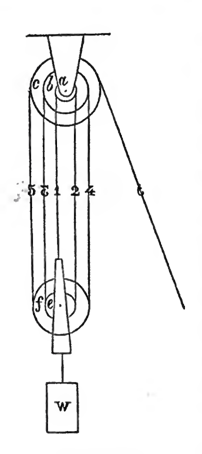


Fig. 255.

corde est fixée à la chape fixe, par conséquent si le nombre des poulies mobiles est le même que celui des poulies fixes, les vitesses des brins formeraient la série 0, 2, 4, 6.

Puisque les brins successifs se meuvent avec une vitesse croissant en progression arithmétique, si l'on détermine les rayons des poulies *a*, *b*, *c*... suivant la même progression, toutes les poulies auront la même vitesse angulaire, et par suite pourront être faites d'une seule pièce. Ce système est donc en apparence assez simple, cependant il n'a pas été adopté dans la pratique, tant parce qu'il est d'une exécution difficile, que parce qu'il ne peut servir que pour des cordes d'un diamètre déterminé, le demi-diamètre de ces cordes devant être compris dans les rayons des poulies formant une progression.

290 bis. *Rapport de vitesses variable.* Dans les systèmes qui précèdent, le rapport des vitesses est constant. Pour qu'il fût variable, il faudrait qu'au lieu d'être circulaire, le profil des poulies autour de leur centre fût formé de courbes autres qu'un cercle, mais symétriques, autrement le mouvement de leur chape ne serait plus rectiligne. De semblables dispositions ne sont jamais employées dans des appareils qui servent dans le but de multiplier les efforts bien plus que pour produire des vitesses déterminées.

MOUVEMENTS CONTINUS

EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

290 ter. *Des mouvements alternatifs.* Avant de traiter des organes de transformation des mouvements continus en mouvements alternatifs, il importe de dire quelques mots des conditions dynamiques auxquelles doivent satisfaire ces derniers, conditions différentes de celles auxquelles les mouvements continus sont assujettis.

Nous avons vu que pour ceux-ci la condition la plus essentielle à remplir était celle de l'uniformité de mouvement, qui répond au minimum de travail résistant. Pour les mouvements alternatifs la condition est toute différente. Comme le mouvement après s'être produit dans un sens doit revenir en sens contraire, il est évident que plus la vitesse du premier mouvement est considérable au point extrême, plus il y a perte de travail consommé à détruire celui emmagasiné par l'inertie des pièces et à les ramener en sens contraire.

Il suit de là que les meilleurs organes ne seront pas ceux qui produiront une transformation de mouvement dans un rapport de vitesse constant, celle de la pièce mue d'un mouvement continu étant généralement uniforme, mais ceux qui communiqueront à la pièce douée d'un mouvement alternatif une vitesse qui passera par zéro lors du changement de sens; dans lesquels la vitesse du mouvement diminuera graduellement et repartira lentement dans la direction opposée, en évitant ainsi les à-coups et les chocs que causerait un brusque changement dans le sens du mouvement, si le corps était à ce moment animé d'une vitesse un peu considérable. C'est la condition de transmission du maximum de travail utile.

Ce sont les organes qui satisfont à cette condition que nous étudierons en premier, et avec le plus de soin, dans chaque cas de transformation de mouvement continu en mouvement alternatif, nous indiquerons les cas où cette condition étant remplie, les vitesses peuvent être transmises dans un rapport constant ou variable, puis nous étudierons les systèmes où la première condition ne peut

être remplie, et qu'on rencontre cependant dans les machines.

Nous remarquerons que pour les organes agissant par intermédiaires, nous n'aurons à traiter que des intermédiaires rigides, les cordes servant comme ceux-ci dans le sens de leur extension, et ne pouvant produire le mouvement en sens opposé comme il serait nécessaire pour engendrer le mouvement alternatif.

IV.

MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE ALTERNATIF.

V.

MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF.

Nous traiterons simultanément des organes qui servent à ces deux transformations, et après avoir exposé l'organe qui fournit la solution pour l'un d'eux, nous montrerons la modification qu'on doit apporter pour l'appliquer à l'autre système, modification qui la plupart du temps se réduit à celle des guides.

291. Le mouvement circulaire continu étant produit par le système tour, et le mouvement circulaire alternatif par le système levier, les organes propres à la transformation d'un de ces mouvements en l'autre consisteront en des moyens de faire agir l'un de ces systèmes sur l'autre.

Par extension, un double système tour pouvant également produire un mouvement alternatif, on pourra obtenir des solutions seulement par des systèmes de ce genre.

Si la longueur du levier devient infinie, l'arc de cercle qu'il décrit devient une ligne droite, et les organes convenables pour la solution du système précédent produiront le mouvement rectiligne alternatif de la pièce, qui en réalité sera alors maintenue par des guides-plans. Comme le mouvement circulaire alternatif n'embrasse le plus souvent qu'un angle assez faible, il suffit, dans la pratique, que le levier soit un peu grand pour que l'arc qu'il décrit puisse être considéré comme une ligne droite ; ce qui montre que les solutions

que nous exposons dans ce chapitre peuvent quelquefois être indifféremment employées dans les deux systèmes.

Première section. — Condition du maximum satisfaite.

1° Organes agissant à l'aide d'intermédiaires rigides.

RAPPORT DE VITESSE VARIABLE.

1° AXES PARALLÈLES.

292. *Bielle.* Le plus simple et le plus parfait de tous les systèmes qui peuvent servir à la transformation qui nous occupe, consiste à réunir par une bielle rigide, à l'aide de deux articulations, c'est-à-dire en ne lui laissant que la liberté de tourner autour des points d'assemblage, l'extrémité du levier et un point de la circonférence du tour; pour chaque révolution de celui-ci le levier fera une double oscillation (fig. 256).

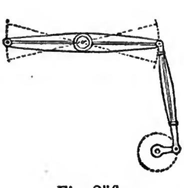


Fig. 256.

Nous allons voir, en étudiant les vitesses dans ce système, qu'il satisfait à la condition du maximum; quant à l'amplitude des deux mouvements, ils sont faciles à déterminer, ou plutôt, étant donnés *à priori*, il est facile de déterminer la longueur du levier et le rayon du tour ou de la manivelle (barre assemblée sur l'axe) qui le remplace.

En effet, r étant le rayon de la manivelle, pour un tour $= 2\pi r$ de celle-ci, le balancier dont la demi-longueur $= l$ fera un angle ω au-dessus et au-dessous de l'horizontale qui est sa position moyenne, les deux positions extrêmes correspondant à un diamètre vertical du tour. Le balancier étant toujours fort long, par rapport au rayon de la manivelle, on a sensiblement $2\,l$ sin. $\omega = 2r$.

293. *Rapport des vitesses.* La vitesse angulaire de la manivelle étant uniforme, celle du levier ou balancier ne l'est pas. En effet,

appliquant ici les résultats exposés art. 180, relativement à la détermination des vitesses angulaires instantanées entre deux leviers assemblés par une bielle, AB étant la ligne des centres (fig. 257) rencontrée en un point Q par une position de la bielle, on a :

$$V_1 : V_2 :: AQ : BQ.$$

Pour les deux points m et n, pour lesquels la bielle passe par le centre A, $AQ = 0$, et $V_1 = V_2 \frac{AQ}{BQ} = 0$.

La vitesse de la bielle passe donc deux fois par zéro aux points morts, aux points qui correspondent au changement de sens du mouvement alternatif du balancier.

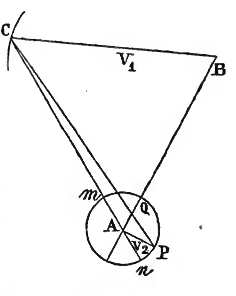
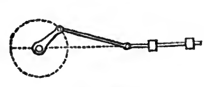


Fig. 257.

La détermination de la vitesse angulaire du balancier en un point, celle de la manivelle étant donnée, pourra donc toujours s'obtenir graphiquement comme ci-dessus. Pour l'obtenir par le calcul, il faut obtenir l'angle θ décrit par le balancier pour une valeur quelconque de l'angle φ décrit par la manivelle, ce qui est possible. La formule à laquelle on arrive est trop compliquée pour être d'aucune utilité dans la pratique ; nous ne la donnerons donc pas pour le cas général.

Cette relation devient assez simple si l'on considère l'extrémité de la bielle comme se mouvant en ligne droite ; il en est à très peu près ainsi le plus souvent, dans le cas du mouvement circulaire alternatif, le balancier étant très long et décrivant un arc d'un petit nombre de degrés. Il en est ainsi exactement pour la seconde transformation que nous avons à considérer (fig. 258), lorsque la bielle produit le mouvement rectiligne alternatif, lorsqu'elle est articulée à l'extrémité d'une barre à laquelle des guides-plans ne permettent qu'un mouvement rectiligne


Fig. 258.

dans le sens de sa longueur. Le chemin parcouru pendant une double oscillation est alors exactement égal à $2r$.

Nous ne nous occuperons dans ce qui suit que de la vitesse linéaire du point qui se meut en ligne droite; il est toujours facile d'en déduire la vitesse angulaire quand le mouvement appartient à une circonférence de cercle.

294. Soit A (fig. 259) le centre de rotation de la manivelle, P l'articulation à laquelle s'attache la bielle P Q, dont l'autre extrémité est articulée au point Q maintenu lui-même de manière à se mouvoir en ligne droite suivant Ad, soit par des guides-plans comme fig. 258, soit par l'effet d' un long levier B Q avec lequel elle est assemblée.

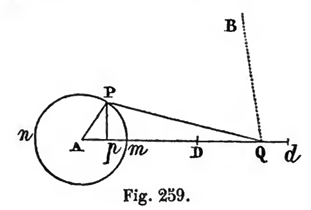


Fig. 259.

Sur la direction A d du chemin parcouru par le point Q, prenez $md = n\text{D} = \text{PQ}$ (m et n étant les points de rencontre de A d avec la circonférence décrite par le point P), chaque révolution de l'axe A fera évidemment décrire au point Q une double oscillation de d en D et de D en d, et l'on aura $\text{D}d = 2\,\text{AP}$.

Menez Pp perpendiculaire à AD, posez $m\text{AP} = \theta$, $\text{AP} = \text{R}$ $\text{PQ} = l$, $\text{AQ} = s$, dans le triangle APQ on a : $\text{AQ} = \text{Q}p \pm \text{A}p$, suivant que p tombe à droite ou à gauche de A, ou en introduisant l'angle θ :

$$\text{AQ} = s = \sqrt{l^2 - \text{R}^2 \sin.^2\theta} \pm \text{R} \cos.\, \theta,$$

en prenant le signe + quand $m\text{AP}$ est aigu, et le signe — quand il est obtus.

On peut donc, à l'aide de cette expression, mesurer le chemin parcouru par le point Q pour un certain angle décrit par le point P. Mais si l'on remarque que presque toujours la bielle est assez longue par rapport à la manivelle, pour qu'on puisse négliger son incli-

naison, ou R sin. θ vis-à-vis de l, ce qui revient à poser $pQ = PQ$, à considérer la bielle comme toujours parallèle à elle-même; on a alors : $s = l = R\cos.\theta$, et si l'espace se mesure de d vers A :

$$s = dQ = mp = R \sin.\text{ vers. } \theta = R(1 - \cos.\theta).$$

Les chemins parcourus entre deux angles θ et θ' par le bouton de la manivelle et l'extrémité de la bielle sont R $(\theta - \theta')$ et R $(\cos.\theta' - \cos.\theta)$.

En général, on a (art. 180) :

$$\frac{\text{Vitesse de P}}{\text{Vitesse de Q}} = \frac{\cos.\ AQP}{\sin.\ APQ};$$

et dans l'hypothèse où la bielle reste parallèle à elle-même, $\cos.\ AQP = 1$, $\sin.\ APQ = \sin.\theta$, donc :

$$\frac{\text{Vitesse de P}}{\text{Vitesse de Q}} = \frac{1}{\sin.\theta}.$$

Cette expression très simple du rapport des vitesses montre bien que la vitesse du mouvement circulaire étant constante, celle de l'extrémité de la bielle ne l'est pas, et elle indique comment elle varie depuis $\sin.\theta = 0$, qui correspond aux deux points morts situés à la rencontre de la direction du mouvement rectiligne avec le cercle décrit par la manivelle, pour lesquels la vitesse de l'extrémité de la bielle est nulle; jusqu'à $\sin.\theta = 1$, qui correspond au diamètre qui coupe à angle droit celui qui réunit les points morts; en ces points la vitesse de l'extrémité de la bielle est égale à celle de la manivelle.

295. *Représentation de la vitesse de l'extrémité de la bielle.* On peut représenter graphiquement les résultats précédents.

Prenons une ligne droite égale à $2\pi = 6^{m},283$ à une certaine échelle, et divisons cette ligne en un certain nombre de parties égales, 20 par exemple, égales chacune à $0^{m},31416$, à des 20es de circonférence, et en chacun des points 1, 2, 3... 20, 21, élevons des perpendiculaires à cette ligne. Divisons également la circonférence en 20 parties égales, nous aurons 20 angles θ_1 θ_2... θ_{20} θ_{21}; si nous portons les valeurs $\sin.\theta_1$ $\sin.\theta_2$... sur les perpendiculaires précédemment tracées, et que par les points ainsi déterminés en nombre suffisant nous fassions passer une courbe, nous obtien-

drons les courbes fig. 260, qui feront sentir comment la vitesse varie; car elles sont telles que l'ordonnée en chaque point indique la vitesse de l'extrémité de la bielle qui correspond à une position de la manivelle déterminée par la longueur de l'abcisse, le mouvement de rotation de P étant pris pour unité.

296. *Représentation du travail de la bielle.* L'aire de ces courbes (fig. 260) représente à une certaine échelle le travail engendré par

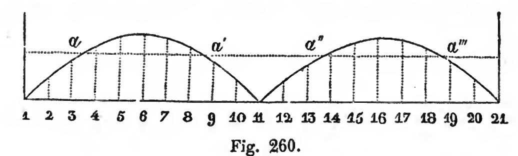


Fig. 260.

l'action d'une force F constante, agissant à l'aide de la bielle sur le bouton de la manivelle. En effet, le point d'application de cette force parcourant le petit arc s de la circonférence, son travail est $F \times s$ projeté sur la direction de F, c'est-à-dire $Fs \times \sin. \theta$, θ étant évidemment égal au complément de l'angle fait par la bielle supposée toujours parallèle à elle-même, avec la tangente au point considéré. Le travail élémentaire correspondant à l'arc s sera donc représenté à une certaine échelle par le petit trapèze qui a cet arc pour base, et pour côtés les valeurs de $\sin. \theta$, et par suite le travail total transmis par la bielle à la manivelle sera représenté par l'aire entière comprise entre la circonférence développée et la courbe dont les ordonnées sont déterminées par les valeurs successives de $\sin. \theta$.

Fig. 261.

Le produit $F \sin. \theta$ est nul quand la perpendiculaire abaissée de l'axe de rotation sur la bielle est égale à zéro, car alors $\theta = 0$, ce qui correspond aux points 1, 11, 21; en ces points la bielle ne produit aucun travail. Le maximum a lieu pour $\sin. \theta = 1$ ou $\theta = 90°$, c'est-à-dire dans la figure aux diamètres verticaux correspondants aux points 6 et 16; enfin la symétrie des figures montre que les deux courbes et chacune de leurs moitiés sont égales de part et d'autre.

297. *Calcul de ce travail.* Le travail développé par la puis-

sance F dans une demi-révolution, pendant laquelle le chemin parcouru, estimé suivant la direction de la force est $2r$, est égal à celui que la résistance constante Q, agissant sur une circonférence de rayon R consomme pendant une demi-révolution ; on aura donc pour un tour entier et une oscillation complète $4Fr = 2\pi QR$. Si donc on construit un rectangle dont la base soit toujours 2π et la hauteur $QR = \frac{4Fr}{2\pi}$, la surface de ce rectangle représentera le travail total développé par la résistance et sera égale à celle que circonscrit la courbe. Les points de rencontre du côté supérieur de ce rectangle avec la courbe correspondront aux points pour lesquels le travail élémentaire de la puissance et celui de la résistance sont égaux (1).

La partie de la courbe que cette droite laisse au-dessous d'elle et les parties du rectangle non comprises dans la courbe, représentent les excédants successifs du travail moteur et du trav.. résistant qui engendrent les irrégularités du mouvement de rotation. Nous verrons comment, à l'aide du volant, on rend peu sensibles ces irrégularités ; nous dirons seulement ici que cet organe consiste en une masse pesante montée sur l'axe de la manivelle, dont le mouvement ne pouvant être arrêté brusquement aux points morts, empêche l'arrêt qui devrait se produire en ces points, puisqu'alors l'effort de la bielle passe par l'axe, ne tend plus à produire de rotation. Son action régulatrice est en raison de son poids et de son diamètre, et par suite ces éléments doivent être déterminés en raison des excédants de travail que le tracé ci-dessus permet de mesurer.

298. *Bielle courte.* Nous avons supposé dans ce qui précède que la bielle reste toujours parallèle à elle-même, que la direction de l'effort moteur reste constante. Il n'en est pas ainsi en réa-

(1) Nous supposons ici qu'il s'agit d'une manivelle à double effet, c'est-à-dire que l'effort constant de la bielle change de sens à chaque demi-révolution. Si l'effort était toujours de même sens, comme cela a lieu pour la pesanteur, le travail serait évidemment nul pour une révolution complète ; enfin, si la manivelle n'agissait que pendant une demi-révolution, la résistance qui, agissant constamment sur une circonférence du rayon R produirait le même travail, serait donnée par l'équation $2Fr = 2\pi Qr$.

lité, et on ne peut admettre dans la pratique les résultats fournis par cette hypothèse quand la longueur de la bielle est au-dessous de cinq à six fois celle de la manivelle. On peut encore, dans ce cas, construire graphiquement les courbes dont l'aire donne le travail produit.

Nous avons vu en effet (art. 180), que si on prolonge les normales aux éléments décrits par les extrémités des leviers assemblés avec la bielle jusqu'à leur point de rencontre, et que de ce point on abaisse une perpendiculaire sur la position primitive de la bielle, le pied de celle-ci se confond avec le point d'intersection de deux positions successives de la bielle. La deuxième position, qui fait un angle infiniment petit avec la première, est donc la tangente voisine du cercle ayant sur la fig. 262 ID pour rayon, et le mouvement

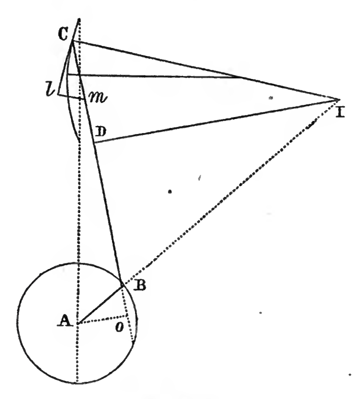


Fig. 262.

de la bielle a lieu un instant comme si elle était seulement obligée, indépendamment de toute autre liaison, à se mouvoir tangentiellement à ce cercle. Si donc on appelle a l'angle décrit autour du centre I dans un déplacement infiniment petit du système, on aura dans ce déplacement élémentaire, pour lequel la figure du système reste invariable, puisqu'il ne se produit qu'une rotation autour du point I, égalité entre les quantités de travail produit par la force F

agissant à l'extrémité du balancier, et la force Q agissant dans la direction de la bielle, ou

$$F \times CI \times a = Q \times DI \times a.$$

Si donc on prend à l'échelle donnée cl (perpendiculaire à CI) pour représenter l'effort constant agissant à l'extrémité du balancier, et qu'on mène lm parallèle à CI, on aura :

$\frac{Q}{F} = \frac{CI}{DI} = \frac{Cm}{Cl}$ car les triangles CDI, Clm sont semblables,

et Cm représentera la force qui agit dans la direction de la bielle. Le tracé qui fournit cette force donne aussi sa distance Ao au centre A. Il sera donc facile de calculer le produit $Q \times Ao$ correspondant à chacune des positions, et de construire la courbe dont les ordonnées seront les valeurs de ce produit correspondantes à des abcisses égales aux arcs décrits par la rotation du bouton de la manivelle, et dont les aires donneront le travail de la bielle.

Les ordonnées de ces courbes (fig. 263) représentent, comme

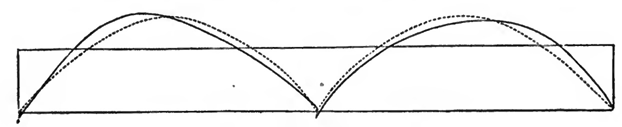


Fig. 263.

dans le cas précédent, à une certaine échelle, le rapport de vitesse de l'extrémité de la bielle à celle de la manivelle. En effet, cette vitesse est proportionnelle en chaque instant à la distance Ao comme dans le cas précédent; la bielle pouvant, pour chaque position, être considérée comme infinie; elle est d'ailleurs également proportionnelle en chaque instant à l'intensité Cm de la force.

299. *Conséquences de l'obliquité de la bielle.* Quand le bouton de la manivelle passe par le point le plus bas de sa course, la direction de la bielle ne passe pas par l'axe de rotation et le moment de l'effort (le produit qu'il faut multiplier par l'angle au centre ω, pour avoir le travail élémentaire) n'est pas nul. Jusqu'à cette position, l'effort agit dans le sens du chemin décrit par le bouton; mais, au delà de cette position jusqu'à celle où le bras de levier

est nul, cet effort tend à faire rétrograder le bouton de la manivelle qui ne persévère dans son mouvement qu'en vertu de l'inertie du volant. Le moment est par conséquent négatif et ne devient positif que quand le bras de levier étant devenu nul change lui-même de direction. Par conséquent, dans cette courte période, ce moment doit être porté en dessous de la ligne des abcisses. Un effet semblable se produit à la fin de l'autre période.

Il résulte de là, contrariété dans le mouvement, refoulement du bouton sur la bielle, et réciproquement; et c'est ce qui contribue, en partie, à produire la vibration toujours nuisible de la bielle. Ce défaut est d'autant plus sensible que la bielle est plus courte.

Il résulte aussi de l'obliquité de la bielle que, dans la première moitié de la demi-révolution descendante du bouton de la manivelle, les bras de levier de la puissance sont plus grands que ceux que donne la supposition d'une bielle infinie, tandis que c'est le contraire dans la seconde moitié; l'inverse se produit dans la demi-révolution ascendante. Les excès du travail moteur sur le travail résistant, *et vice versâ*, cessent d'être égaux, et les courbes ne sont plus symétriques. C'est ce qui se voit bien sur la fig. 263 (sur laquelle les lignes ponctuées représentent les courbes pour une bielle infinie), que nous empruntons à M. Morin, ainsi que la plus grande partie de ce qui précède, relativement au travail des bielles.

300. Le système qui consiste dans une manivelle, une bielle et un balancier, satisfait parfaitement aux conditions dynamiques; il est en général sans inconvénient que le rapport de vitesse y soit variable comme il résulte de la nature même de ce système. Cependant, dans quelques cas particuliers, on a besoin de satisfaire à des conditions de rapport de vitesse particulières. On résout quelques-uns de ces problèmes à l'aide de combinaisons de bielles qui jouissent encore des avantages propres à ce genre d'organes. Nous y reviendrons plus loin en traitant des combinaisons de mouvements; nous ne traiterons ici que d'un cas particulier obtenu avec une seule bielle, celui où le mouvement doit cesser par intermittence.

301. On emploie alors une bielle dans l'extrémité de laquelle on pratique une rainure.

Soit B le centre de mouvement de la roue (fig. 264) qui communique, par l'intermédiaire d'une bielle, un mouvement d'oscillation au levier A*m*. L'extrémité de la bielle porte une rainure *mn*, dans laquelle passe une cheville *m* fixée à l'extrémité du levier A*m*. Ce levier se meut autour du centre A et est disposé, soit pour rester

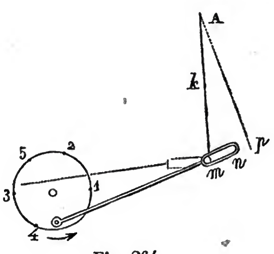


Fig. 264.

au point extrême où il parvient jusqu'à une action nouvelle, soit pour appuyer constamment sur le fond de la rainure par l'effet d'une force quelconque, d'un poids ou d'un ressort, sa course vers l'axe de rotation étant dans les deux cas limitée en A*k* par un arrêt.

Dans le premier cas, lorsque le mouvement arrive à son extrémité, la cheville *m* arrive au point extrême de la course *p*, et quand le mouvement de la bielle change de direction, le levier ne reçoit pas de mouvement jusqu'à ce que l'autre extrémité *n* de la rainure ait rencontré la cheville et la ramène à la position initiale; arrivée en ce point, il y aura repos jusqu'à ce que l'autre extrémité *m* ait rencontré la cheville.

Le mouvement du levier est ainsi interrompu à la fin de chaque course pendant un temps qui dépend de la longueur de la rainure. Si 1 et 3 sont les points qui correspondent au changement de direction de la bielle, 2 et 4 les points qui correspondent aux positions de la bielle dans lesquelles les extrémités de la rainure commencent à agir, on aura le mouvement suivant pour chaque tour :

La roue tourne {
- de 1 à 2, le levier reste en A*p*,
- de 2 à 3, il se meut de *p* en *m*,
- de 3 à 4, il reste en A*m*,
- de 4 à 1, il se meut de *m* en *p*.

Dans le second cas, le levier étant toujours poussé vers le centre de la roue, la cheville m est toujours en contact avec l'extrémité de la rainure la plus rapprochée du centre, si ce n'est lorsque le levier est arrêté en Ak par l'arrêt k.

Quand Am s'appuie contre cet arrêt, dans la position correspondant par exemple au point 5, il n'y a plus d'action pendant la fin de la course, en arrière, de la rainure. Prenons 3,4 égal à 3,5 sur la circonférence de la roue, le mouvement sera le suivant :

La roue tourne { de 1 à 5, le levier va de Ap en Am, de 5 à 4, il reste fixe. de 4 à 1, il se meut de Am en Ap.

Ces systèmes, dans lesquels la cheville en repos est rencontrée par la bielle en mouvement, d'où résulte un choc, ne sont convenables que pour des forces minimes.

302. *Frottement de la bielle.* Le travail du frottement de la bielle se compose de deux parties : celui qui se produit sur le bouton de la manivelle, et celui qui se produit à l'articulation de la bielle avec le balancier ou avec la tige guidée en ligne droite.

Nous avons déjà donné (art. 185) le frottement sur le bouton de la manivelle. Celui qui se produit à l'extrémité du balancier se calculera de même, ce système ne différant pas du précédent pour une fraction de tour ; ainsi le balancier décrivant un angle α, le frottement pour une double oscillation sera $2\pi r \mathrm{P} f \frac{\alpha}{180} = \pi r \mathrm{P} f \frac{\alpha}{90^\circ}$.

On voit que ces frottements sont très peu considérables, les valeurs de r étant elles-mêmes petites, ce qui fait encore comprendre l'emploi si fréquent de ce système dans les machines.

Si la bielle produit le mouvement rectiligne, le frottement qui se produit à son articulation avec la barre guidée en ligne droite ne parcourt que l'arc du même nombre de degrés que celui dont le double rayon de la manivelle est la corde et la bielle le rayon, mesuré sur la circonférence qui a pour rayon celui de l'articulation. Il est donc encore très peu considérable, surtout auprès de celui de la barre maintenue dans des guides-plans.

303. *Excentrique circulaire.* Dans tout ce que nous avons dit au sujet de la manivelle et de la bielle, nous n'avons rien sup-

posé quant à la grandeur du bouton de la manivelle; il peut donc être quelconque, et la vitesse du mouvement transmis ne changera pas, pourvu que la distance des centres de la manivelle et du bouton reste la même.

Si le rayon du bouton grandit jusqu'à être plus grand que cette distance des centres, le mouvement ne changera encore aucunement, seulement la disposition de l'assemblage ne peut plus être celle exposée précédemment. La bielle est alors remplacée par une double tringle terminée par un collier qui entoure la circonférence d'un cercle tournant autour d'un point autre que son centre (fig. 265). C'est le système appelé *excentrique circulaire*, qui,

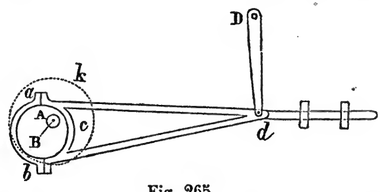


Fig. 265.

comme nous venons de le voir, n'est qu'un cas particulier de la bielle, et donne absolument les mêmes vitesses pour une même distance des centres.

304. *Frottement des excentriques circulaires.* L'expression du frottement est toujours la même que dans le cas de la manivelle, seulement le rayon de l'excentrique remplaçant le rayon du bouton, le frottement devient très grand et peut devenir supérieur au travail entier de la force motrice.

En effet, pour un tour, le travail du frottement sera $\pi r f F$; celui de la force motrice agissant dans la direction de la bielle sera $4FR$ (R distance des deux centres). Le rapport de ces deux quantités sera $\frac{2\pi r f F}{4FR} = \frac{\pi r f}{2R}$.

Or, comme $\pi = 3,14$, on voit qu'il ne faut pas que r, toujours supérieur à R, soit avec lui dans un rapport bien grand pour que cette expression soit plus grande que l'unité, bien que f soit fractionnaire.

Les excentriques circulaires ne doivent donc jamais être employés pour transmettre d'importantes quantités de travail.

TRANSFORMATION DU MOUVEMENT CIRCULAIRE OU RECTILIGNE ALTERNATIF EN CIRCULAIRE CONTINU.

305. Nous avons supposé, en général, dans les systèmes qui précèdent, que c'est le mouvement circulaire continu qui produit le mouvement alternatif. Revenons sur le problème inverse, et voyons comment il peut être résolu, soit à l'aide des organes étudiés, soit à l'aide de nouveaux organes.

Bielle. La bielle sert avantageusement à transformer le mouvement circulaire alternatif du balancier en un mouvement circulaire continu, c'est même ainsi qu'elle sert le plus souvent. Mais alors il faut remarquer que, d'après ce qui précède, elle ne peut, en agissant avec une vitesse uniforme, engendrer un mouvement circulaire continu uniforme, qui généralement doit être obtenu. En effet, la manivelle décrivant des arcs variables pour des chemins égaux parcourus par la bielle en divers instants, la vitesse du mouvement continu varie et le rapport des deux vitesses est $\frac{1}{\sin.\theta}$ comme nous l'avons vu, pour un angle θ. On rend le mouvement de rotation uniforme à l'aide d'un appareil régulateur, dit volant, dont nous parlerons au livre III.

Quand le volant ne peut être employé, la manivelle ne peut fonctionner qu'autant qu'on fait varier la direction de l'effort vers les points morts; on emploie, dans ce cas, au moins deux manivelles disposées à angle droit l'une sur l'autre, une manivelle double. L'emploi de manivelles multiples a pour objet de resserrer les limites de variations de vitesses du mouvement circulaire; nous traiterons cette question plus loin aux *Combinaisons de mouvement.*

306. Au lieu d'un tour par oscillation du levier, comme le fournissent la bielle et la manivelle, quelques organes beaucoup moins employés fournissent le moyen d'obtenir directement, sans transformation ultérieure, un mouvement dans lequel chaque oscillation ne répond qu'à une fraction de tour. Dans ces systèmes, une

bielle articulée ne réunit plus la roue et le levier par des articulations invariables, l'assemblage n'est que momentané; c'est par le mode d'assemblage que ces systèmes diffèrent des précédents.

Encliquetages. On donne généralement le nom d'encliquetages aux organes composés essentiellement de pièces mobiles venant agir successivement sur la roue qui doit recevoir le mouvement; ils agissent par suite avec intermittences. On peut les diviser en deux classes : encliquetages à dents, encliquetages par pression.

307. *Encliquetages à mouvement circulaire alternatif (à dents).* A un levier est adaptée une dent pouvant prendre un petit mouvement autour de son articulation; cette dent mobile vient s'accrocher aux dents d'une roue dentée assemblée sur un axe (fig. 266). Le mouvement circulaire de va-et-vient imprimé à l'extrémité du levier produit l'assemblage de la dent à articulation avec les dents successives de la roue. Cette action est rendue continue ou au

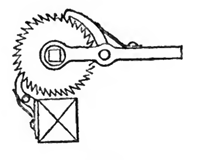




Fig. 266.

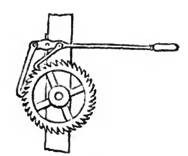


Fig. 267.

moins n'éprouve que de très courtes intermittences dans le levier de Lagarousse (fig. 267); dans cette disposition, l'un des crochets agit quand l'autre va se placer sur de nouvelles dents.

C'est évidemment toujours dans cet organe le mouvement circulaire alternatif qui est transformé en mouvement circulaire continu; l'inverse ne saurait avoir lieu.

La facilité avec laquelle l'action de l'homme peut se produire à l'extrémité d'un levier pour y développer un effort considérable, et agir par un mouvement de va-et-vient, rend cet organe précieux pour appliquer la force de l'homme. On le rencontre aujourd'hui dans plusieurs machines servant à soulever des fardeaux. On emploie

en général la disposition de la fig. 266, et on rend l'action continue en faisant agir à la fois plusieurs leviers.

Il faut remarquer toutefois que les intermittences produisant une succession de petits chocs, ce système est sous ce rapport désavantageux et ne doit être employé que pour des forces peu considérables.

308. Si, au lieu de dents, on emploie un autre système qui puisse rendre momentanément solidaires la roue et l'extrémité du levier, on pourra obtenir des variétés de systèmes d'encliquetages. Tel est le suivant :

Encliquetages par pression. Le système d'encliquetage par pression est dû à M. Saladin de Mulhouse.

Si l'on fait passer sur la jante d'une roue un anneau (coupé seulement pour laisser passer le bras de la roue) (fig. 268) en le faisant monter normalement à la circonférence, on n'éprouvera pas de résistance; mais si on exerce une traction oblique, l'anneau prend une position différente de la normale et serre la jante avec une force suffisante pour entraîner la roue. L'anneau ne peut plus glisser, il ne pourrait que s'ouvrir si l'effort était trop considérable.

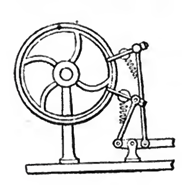


Fig. 268.

En faisant porter les deux anneaux sur deux bielles situées des deux côtés du point de rotation d'un levier, comme le représente la figure, l'action de ceux-ci sera successive et le mouvement circulaire alternatif de l'extrémité du levier engendrera le mouvement circulaire continu de la roue.

Les organes qui précèdent ne permettent d'obtenir qu'une fraction de tour de la roue par oscillation du levier, avec ceux que nous allons bientôt étudier, le nombre de tours de la roue est peut-être plus grand que celui des oscillations de balancier, mais dans les deux cas on peut toujours, par des transformations ultérieures, obtenir toutes les vitesses dont on peut avoir besoin.

309. *Encliquetages muets.* Dans les encliquetages le choc des dents occasionne un bruit désagréable et les dents s'usent rapidement.

On évite cet inconvénient avec les encliquetages *muets*, tous fondés sur le même principe; la figure 269 en montre une des dispositions les plus simples.

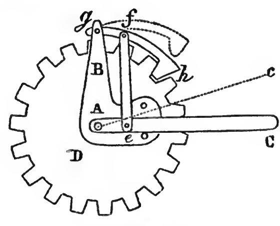


Fig. 269.

D est la roue dont les dents doivent être entaillées suivant des rayons, B est un levier à rochet concentrique avec la roue, et portant le rochet *gh* assemblé avec lui en *g*; A*c* est un levier également concentrique avec la roue et se mouvant aussi exactement autour du centre A. Ce levier est joint par la barre *ef* avec le rochet *gh*, et se meut entre deux chevilles adaptées à la face du levier B.

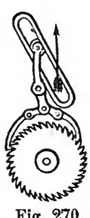
L'action se produit comme il suit. Lorsque le levier AC remonte vers A*c*, il enlève *gh* de sa dent par le moyen de la barre *ef*, puis rencontre la cheville supérieure du levier B et l'entraînant, se meut avec lui de *f* vers *g*, mais sans entraîner la roue, puisque le rochet *n'* est plus engagé dans les dents et se trouve dans la position indiquée par les lignes ponctuées.

Dans l'oscillation inverse, lorsque le levier A*c* se meut dans la direction opposée, en descendant de *c* vers C, il parcourt l'espace *c*C sans que le levier B se mette en mouvement; abaisse la bielle *ef* pendant ce temps et engage le rochet entre les dents; enfin, lorsque A*c* rencontre la cheville inférieure, les deux leviers, le rochet et la roue marchent ensemble.

L'action de cette combinaison se produit en silence; le levier A*c* soulevant et engageant successivement les dents du rochet avant que les forces ne soient en jeu, on évite le bruit désagréable et les chocs des dispositions ordinaires.

310. *Encliquetages à mouvement rectiligne alternatif.* Les encliquetages peuvent aussi être disposés de manière à produire un mouvement circulaire à l'aide d'un mouvement rectiligne alternatif. Telle est la disposition représentée dans la figure qui se compose d'un système double dont chaque partie agit pour chaque direction du mouvement alternatif, et pourrait agir isolément en laissant la roue en repos pendant un de ces mouvements.

Il se compose (fig. 270) d'une roue sur les dents de laquelle vient agir une dent terminant la pièce qui a un mouvement rectiligne alternatif déterminé par un galet qui se meut dans une rainure. Cette dent est articulée à son extrémité de manière à pouvoir se plier pour surmonter les dents en revenant, après les avoir poussé en allant; action que reproduit inversement la seconde dent en forme de crochet. Suivant la longueur du mouvement rectiligne, il est clair qu'on fera tourner la roue d'une ou plusieurs dents par chaque période de mouvement.


Fig. 270.

2° AXES NON PARALLÈLES.

311. Nous avons supposé dans ce qui précède que les deux axes de rotation étaient parallèles, et que la roue et le levier se mouvaient dans un plan perpendiculaire à leurs axes. Il en est toujours ainsi dans la pratique, sauf à employer, s'il y a lieu, une transformation supplémentaire de circulaire continu en circulaire continu. Voyons toutefois quelle extension on peut donner aux solutions décrites.

Bielles. Le plan décrit par le balancier n'étant pas perpendiculaire à l'axe du mouvement de rotation, on pourrait encore à la rigueur assembler la manivelle avec cet axe au point de rencontre de l'axe du mouvement de rotation et du plan décrit par le balancier. En laissant du jeu à l'articulation de la bielle et du balancier, dont l'axe est dans la position moyenne de ce dernier

parallèle à l'axe de rotation, le mouvement pourrait encore se communiquer, mais en produisant une torsion de l'axe de rotation qui doit faire rejeter cette disposition pour de fortes machines. On rencontre cependant quelquefois la disposition de l'axe de rotation parallèle à la position moyenne du balancier et dans le plan décrit par celui-ci.

Si, dans les systèmes précédents, on plaçait la manivelle en un point quelconque de l'axe du mouvement continu autre que celui de sa rencontre avec le plan du balancier, on aurait une disposition évidemment inacceptable, il se produirait dans le système des torsions, des frottements et des résistances énormes.

Encliquetages. Le levier d'un encliquetage peut tourner autour d'un axe quelque peu incliné sur celui de la roue; l'angle décrit à chaque oscillation étant peu considérable, la forme de la dent peut encore permettre l'engrènement avec la roue, toutefois en augmentant encore les résistances passives considérables de ce genre d'appareils, peu usités tant par ce motif qu'à cause de l'intermittence des mouvements qu'ils produisent.

La disposition de la fig. 271, analogue à celle du petit instrument connu sous le nom de *clef de Bréguet*, est celle d'un encliquetage pour deux axes placés à angle droit.

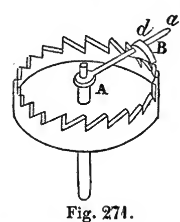


Fig. 271.

2° Organes agissant par contact immédiat.

RAPPORT DE VITESSE CONSTANT OU VARIABLE.

AXES PARALLÈLES.

312. *Excentriques.* Les organes qui agissent par contact immédiat et qui, à l'aide d'un mouvement circulaire continu, produisent un mouvement circulaire ou rectiligne alternatif satisfaisant à la condition du maximum de transmission de travail utile, c'est-à-dire dont la vitesse par variations continues, passe par zéro lors du changement de sens du mouvement, sont appelés *excentriques.* Ils consistent en des courbes montées sur un axe qui

passe par un point qui n'est pas à égale distance de tous les points de leur circonférence.

Un levier ou une barre guidée en ligne droite s'appuyant sur le contour d'une semblable courbe, prendra évidemment lors du mouvement de celle-ci, puisque tous les points de ce contour ne sont pas à égale distance du centre, un mouvement circulaire ou rectiligne. Ce mouvement sera alternatif si la pesanteur ou un ressort applique toujours le système conduit sur la courbe, puisque après avoir été écarté ou rapproché du centre, il doit revenir à la position initiale.

313. Ainsi soit A le centre du mouvement d'un excentrique (fig. 272) *mnpq*, BD le levier ou la barre menée, garnie d'un galet à son extrémité qui repose sur l'excentrique. Soit A*m* le plus petit rayon de l'excentrique, A*p* le plus grand, le rayon allant toujours en croissant dans la direction *mnp*, en décroissant suivant *pqm*.

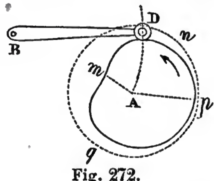
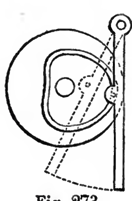


Fig. 272.

Si l'excentrique tourne d'une manière continue dans la direction de la flèche, le rouleau D sera poussé, s'éloignera du centre pendant le passage de *mnp*, et s'en rapprochera pendant le passage de *pqm* pour revenir à la position initiale, en supposant qu'un ressort ou un poids applique constamment le galet sur le contour de l'excentrique.

314. Si on ne peut employer sans inconvénient un poids ou un ressort, on peut faire porter au plateau mu d'un mouvement circulaire une rainure (figure 273), dans laquelle passe une cheville adaptée à la pièce qui se meut d'un mouvement alternatif; celle-ci pourra être menée dans les deux sens par le plateau seul, par l'action successive des deux faces de la rainure.


Fig. 273.

315. *Tracé des excentriques.* Si l'on trace un certain nombre de positions successives de l'extrémité de la pièce à mouvement alternatif, et que d'après la loi du rapport des vitesses on déter-

mine la position d'une ligne sur laquelle doit se trouver situé le contact avec l'extrémité de la pièce à mouvement alternatif pour chacune de ces positions, on aura successivement les positions et les distances au centre de points du contour de l'excentrique en nombre suffisant pour tracer celui-ci. C'est ce que vont rendre plus clair les applications successives de cette méthode.

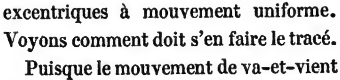
Auparavant nous remarquerons que toutes les fois que les courbes seront continues, sans saut brusque, que le rayon vecteur variera d'une manière continue pour une variation angulaire infiniment petite, l'excentrique jouira de l'avantage de satisfaire à la condition du maximum.

Ce qui fait en outre et surtout employer les excentriques, c'est que la loi du mouvement alternatif variant avec la forme de la courbe (loi qui s'obtient toujours facilement par les principes exposés en général en traitant du roulement d'une courbe sur une autre courbe, dont les excentriques sont un cas particulier); on peut obtenir en variant ces formes toute variation de vitesse (et par suite de pression pour une même quantité de travail en 1″). On parvient ainsi, notamment dans les machines opératrices, à opérer une action déterminée, quelque compliquée qu'en soit la loi, et à imiter par exemple, dans nombre de cas, le travail intelligent de la main de l'ouvrier.

1° MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF.

Vitesse uniforme. — Direction du mouvement rectiligne rencontrant l'axe de rotation.

316. *Courbes en cœur.* Un des modes d'emploi les plus fréquents des excentriques est celui des courbes, dites *courbes en cœur* ou



excentriques à mouvement uniforme. Voyons comment doit s'en faire le tracé.

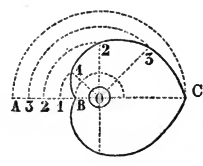


Fig. 274.

Puisque le mouvement de va-et-vient doit être uniforme, le point B (fig. 274) de la droite BA devra successivement occuper les positions équi-distantes B, 1, 2, 3, A, les longueurs B1, 12... étant supposées des parties égales de la

course AB. Si, du point O comme centre, on décrit les cercles O 1, O 2, O 3, OA, et que l'on divise la circonférence OB en un même nombre de parties égales que le mouvement rectiligne de la barre BA, la rencontre des rayons passant par les points de division avec les circonférences décrites, indiquera les points par lesquels devra passer la courbe qui satisfera à la condition de communiquer un mouvement uniforme à la ligne BA par une rotation uniforme de l'axe O. On a soin d'arrondir les angles tels que celui existant en B, pour qu'il n'y ait pas d'arc-boutement.

Pour produire le mouvement de va-et-vient, une oscillation descendante identique avec l'oscillation descendante, la partie inférieure de la courbe, au-dessous de BC, direction du mouvement rectiligne, est en tout semblable et symétrique avec la partie supérieure.

317. Cette courbe est évidemment une partie de spirale d'Archimède allongée, dont l'équation est $\rho = a\omega + C$; le rayon vecteur, moins une quantité constante, est constamment proportionnel à l'angle décrit.

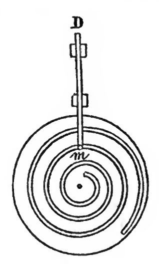


Fig. 275.

Lorsque le mouvement transmis dans chaque sens doit correspondre à plus d'un tour, on peut encore, pour chaque période de mouvement, employer une spirale d'Archimède. La fig. 275 représente une disposition de cette nature, dite vis plate. La rainure en forme de spirale tracée dans le plateau reçoit une cheville implantée à l'extrémité de la barre. Une seconde spirale, se raccordant à la première à ses deux extrémités, peut ensuite produire le mouvement inverse du premier.

318. Il résulte du tracé de la courbe en cœur (art. 316) que toutes les droites passant par le centre O, terminées de part et d'autre aux deux courbes, sont égales à OA + OB. Ainsi O 3, par exemple, sera de O à 3 égal à OB + B 3 sur la ligne AB, et le prolongement jusqu'à la courbe inférieure sera, à cause de la symétrie, égal à O 1 ou OB + B 1 = A 3 + OB; donc cette ligne sera égale à BC, ou OA + OB.

La propriété ci-dessus offre l'avantage de permettre de communiquer le mouvement rectiligne par deux points écartes situés de chaque côté de la courbe, ce qui assure la régularité du mouvement et rend l'emploi de cet organe possible dans quelques cas où la résistance change de direction pendant le mouvement.

On peut en effet munir la pièce à mouvoir de deux chevilles, ou mieux, pour diminuer les résistances de frottement, de deux galets placés aux points sur lesquels agit la courbe. Les axes de ces galets parallèles à l'axe de rotation projeté en O doivent être reliés par un châssis de forme invariable, guidé de manière à ne pouvoir se mouvoir que suivant AB.

L'emploi de galets doit faire modifier le tracé de la courbe, qui doit leur être tangente dans toutes leurs positions. Pour obtenir la courbe convenable, il faut, d'un nombre suffisant de points de la courbe tracée comme ci-dessus, décrire de petites circonférences avec un rayon égal à celui des galets, et leur mener une courbe tangente, qui sera la véritable forme de l'excentrique.

319. En résumé, que le rapport des vitesses soit constant ou variable, le tracé des excentriques, d'après le mouvement qu'on veut faire prendre à la tige qui doit avoir un mouvement alternatif, est le suivant :

Ayant déterminé n positions de l'extrémité de la tige pendant une oscillation, correspondant à des intervalles égaux à une fraction n du temps que l'axe met à parcourir un tour ou partie d'un tour d'un mouvement supposé uniforme, on divise les quatre angles droits autour de l'axe ou la partie des quatre angles droits correspondant à une oscillation, en n parties, les rencontres des arcs de cercles décrits du centre de rotation qui passent par les positions de l'extrémité de la tige, avec les lignes de division correspondantes, déterminent n points de la courbe.

320. Supposons, pour dernière application, qu'il faille obtenir diverses intermittences dans le mouvement; la courbe en cœur serait encore facilement tracée, par exemple qu'il fallût (fig. 276) que dans le premier quart de tour le point B marchât uniformément jusqu'en A, que, dans le second quart, il y eût intermittence, que, dans le

troisième quart, le point B revînt uniformément de A en B, puis qu'enfin dans le quatrième quart, il y eût de nouveau intermittence. Les parties BD, CE, se traceraient, comme nous l'avons vu pour le mouvement uniforme, et les parties DC, BE, seraient des arcs de cercle ayant leur centre en O et ne pouvant, par suite, imprimer aucun mouvement résultant d'excentricité.

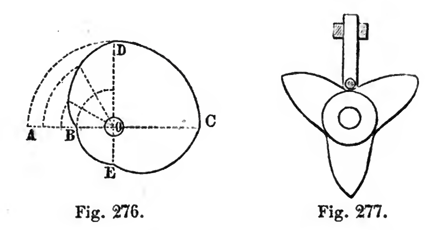


Fig. 276. Fig. 277.

La fig. 277 montre la combinaison de plusieurs excentriques, lorsqu'il faut que le mouvement rectiligne alternatif ait plusieurs allées et venues (trois dans le cas de la figure) pour un seul tour de la roue. C'est donc un tiers de quatre droits qu'il faut pour le tracé, diviser en un nombre de parties égal au nombre de points déterminés sur la tige menée en ligne droite.

Mouvement rectiligne situé dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, mais ne rencontrant pas celui-ci.

321. Dans les tracés qui précèdent nous avons supposé que l'extrémité de la barre se mouvait suivant un rayon passant par le centre de rotation ; la méthode précédente n'est plus applicable sans modification au cas actuel. Les longueurs qui correspondent aux diverses positions que prend l'extrémité de la barre, doivent dans ce cas être portées sur des droites faisant des angles constants avec les divers rayons du cercle décrit du centre de rotation comme centre, et tel que le rayon qui passe à son point de rencontre avec la barre fasse cet angle constant. Deux droites semblables viendront évidemment coïncider comme les rayons qu'elles rencontrent par une rotation qui amènera un des rayons sur le pre-

mier. Décrivons le tracé d'une de ces courbes par points, en employant la tangente au cercle, la ligne qui fait un angle droit avec le rayon.

Supposons que les vitesses doivent être telles que pour les rotations correspondant aux points 1, 2, 3, 4, 5 de la circonférence (fig. 278), la barre doive se trouver aux points I, II, III, IV, V. Menons en chacun de ces points de la circonférence des tangentes, puis du centre A traçons des cercles passant par les points I, II, III, qui viennent rencontrer les tangentes correspondantes, aux points *a*, *b*, *c*, *d*. On déterminera ainsi une série de points par lesquels on fera passer la courbe demandée.

Si le mouvement rectiligne doit être uniforme, les espaces I-II, II-III, III-IV, IV-V sont tous égaux entre eux, comme les intervalles pris sur la circonférence, et la courbe est une développante de cercle si les espaces rectilignes et les intervalles de deux points de division sur le cercle sont égaux en développement; des développantes allongées ou raccourcies si les espaces sont dans un rapport constant.

Il est facile d'établir l'équation d'une semblable courbe.

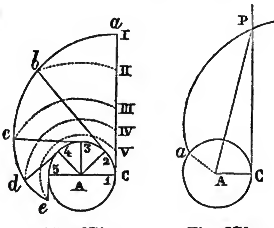


Fig. 278. Fig. 279.

En effet, r étant le rayon vecteur, θ l'angle du rayon passant par le point initial avec le rayon vecteur (fig. 279), CP le chemin qui sera parcouru en ligne droite suivant la tangente pour un mouvement circulaire de C en a, φ l'angle polaire m étant le rapport de vitesse constant, on aura arc $Ca = m \times CP$, ou $\theta + \varphi = m$ tang. φ. Or, a étant le rayon du cercle, tang. $\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$ et $\varphi =$ arc. cos. $\frac{a}{r}$,

donc on a : $\theta + \text{arc. cos.} \frac{a}{r} = \frac{m}{a} \sqrt{r^2 - a^2}$, équation qui permet de déterminer la valeur de r pour toute valeur de θ.

Pour $m = 1$, l'équation devient $\theta + \text{arc. cos.} \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$, équation de la développante du cercle du rayon a.

322. Ce qui précède suffit évidemment par tracer pour un rapport de vitesse quelconque, la forme des excentriques. Nous n'avons pas à insister sur les formes variées à l'infini qui peuvent prendre les excentriques dans les divers cas de la pratique, le tracé se déduira toujours facilement de ce qui précède.

Dans le cas où l'excentrique est un cercle dont le centre est en b, et qui tourne autour du point a (figure 280); ac étant la direction rectiligne assurée par des guides au galet c, il est clair que nous retombons complétement dans le cas de l'excentrique circulaire décrit art. 303, et que la vitesse du mouvement rectiligne est celle de l'extrémité de la bielle dans le système composé de la bielle et de la manivelle.

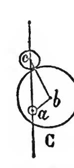
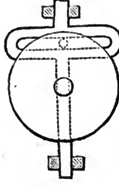


Fig. 280.

323. *Rainures appartenant au système conduit.* Dans les divers systèmes qui précèdent une cheville ou galet est adapté au système conduit; une rainure ou une courbe au système qui conduit.

On peut employer la disposition inverse, adapter les courbes au système conduit, la cheville ou galet au plateau mu d'un mouvement circulaire continu.

Telle est la disposition représentée dans la fig. 281, dans laquelle la rainure est adaptée transversalement à la barre qui ne peut se mouvoir que dans le sens de sa longueur. Il est facile de voir que le rapport des vitesses dans ce système est encore iden-


Fig. 281.

tiquement celui qui peut être obtenu avec une bielle infinie et une manivelle. Pour un angle de rotation le mouvement rectiligne est de même égal à la longueur interceptée sur la direction du mouvement rectiligne, par la projection du centre de la cheville aux deux extrémités de cet angle. Il est bien clair que les deux systèmes ne sont cependant pas équivalents, à cause des frottements considérables de celui que nous étudions ici.

Si l'on voulait que le mouvement de la tige VV′ fût proportionnel à la rotation de la roue, la rainure dans laquelle glisse le galet ne devrait plus être une droite mais une courbe facile à construire.

Divisons la demi-circonférence *ae* (fig. 282) en un certain

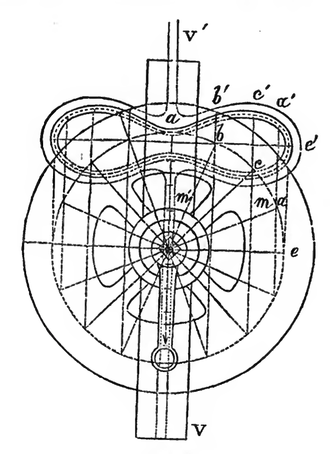


Fig. 282.

nombre de parties égales, et la longueur de la course en un même nombre de parties *l* égales aussi.

Soient m, m' deux points de division correspondants. Il faut que quand le galet fixé à la circonférence et qui parcourt la courbe aa' sera arrivé en m, le point a de la tige VV′ soit arrivé en m'. Si donc on prend $ma' = am'$, le point a' appartient à la courbe que le

galet doit parcourir pour obliger cette rainure de descendre de la quantité am'.

La suite des points ainsi déterminés formera la courbe suivant laquelle il faudra tracer la rainure.

Si l'on veut que pendant que le galet parcourra une demi-circonférence, la tige descende seulement de la quantité $2r - \alpha$, moindre que le diamètre $2r$, c'est cette longueur qu'on divisera en autant de parties que la demi-circonférence pour construire la rainure. L'intervalle qui séparera les deux branches de la courbe sera égal à α, de sorte que quand le galet se trouvera à l'extrémité inférieure du diamètre vertical, le point a de la rainure en sera distant de cette longueur α.

324. Si l'on fait croître le diamètre de la cheville d'assemblage dans le système de la fig. 281, l'excentrique prend la figure représentée fig. 283, dans laquelle a est le centre de mouvement et b le centre du cercle. La rainure est alors formée de deux barres parallèles, assemblées à angle droit avec la barre glissante; cette combinaison est strictement équivalente à celle de la fig 281, ab étant la distance du centre de la cheville au centre du mouvement.

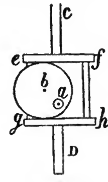


Fig. 283.

325. Toute courbe peut fournir le même mouvement que l'excentrique circulaire, si elle possède cette propriété que toute paire de tangentes opposées et parallèles soient à une distance constante et égale à la distance des deux barres, que par suite, ces barres touchent la came dans toutes les positions. Telle est, par exemple, la courbe de la fig. 284 employée pour produire un mouvement intermittent.

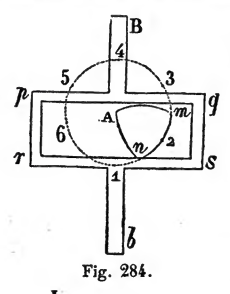


Fig. 284.

A est le centre de rotation de la came, formée par un triangle équilatéral Amn, dont les côtés sont formés d'arcs de cercle dont le centre est le

sommet opposé du triangle, le centre de rotation A étant l'un de ceux-ci. La barre mue par l'excentrique est coupée et terminée par deux barres à angle droit sur sa direction pq, rs, dont la distance est égale au rayon des arcs des contours de la came. Conséquemment, les barres seront en contact avec la came dans toute position, et il sera facile de déterminer les rapports de vitesse.

Divisons en six parties égales le cercle décrit de A avec le rayon Am. Lorsque ce point m tourne autour du centre A dans la direction des nombres, en partant du point 1 placé comme sur la figure, le point A est en contact avec la barre supérieure et il est clair que la courbe passant de 1 à 2, il ne se produit pas de mouvement; de 2 à 3, le point n est en contact avec rs, et le mouvement de la barre est absolument le même que celui produit par une cheville dans une rainure transversale près du diamètre parallèle à celle-ci, n remplaçant la cheville, le mouvement de la barre va donc en s'accélérant; quand m arrive en 3, l'action de n est terminée brusquement, et m exerce alors une action semblable sur pq, le mouvement de la barre est alors retardé et elle arrive graduellement au repos quand m atteint 4. De 4 à 5 la barre reste entièrement en repos, de 5 à 6 le mouvement est graduellement accéléré, et de 6 à 1 graduellement retardé.

Le mouvement de la barre est donc le même que celui du système de l'art. 318 dans certaines parties, avec des intervalles de repos.

326. *Frottement des excentriques.* Le contour des excentriques étant toujours fort grand relativement à la course des tiges conduites, le travail consommé par le frottement le long d'un chemin étendu est toujours considérable par rapport à l'effet utile. Aussi n'emploie-t-on guère ce genre d'organes que dans le cas des machines opératrices, jamais pour simple communication de mouvement, et seulement pour des pressions peu considérables et de petites vitesses. En effet, outre le frottement que nous allons évaluer, la pression de la courbe sur le galet, dont on a soin de munir la tige mise en mouvement, ne s'exerce pas dans le sens du mouvement rectiligne de ce galet, conséquemment il en résulte une pression considérable de la barre contre la rainure dans laquelle elle est guidée.

Le frottement d'un excentrique surmontant une résistance Q de direction constante, qui est celle de la tige mue en ligne droite, est égal en chaque instant à fQ cos. α. α étant l'angle de cette direction avec la normale à la courbe au point de contact (fig. 285). Pour un arc de la courbe infiniment petit ds, pour lequel celle-ci se confond avec sa tangente, le travail absorbé par le frottement sera f Q cos. αds.

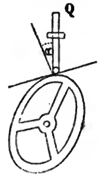


Fig. 285.

On aura le travail total du frottement en faisant la somme des quantités de travail élémentaire fQ cos. αds pour tous les points de la courbe; ce qui s'obtiendra, par exemple, par la quadrature d'une aire plane limitée par une courbe tracée par points, dont les ordonnées seront les valeurs successives de fQ cos. α, et les abcisses des parties de la courbe développée.

MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF.

Donnons le tracé des excentriques pour le cas du mouvement uniforme, pour un rapport de vitesse constant, il sera bien facile d'en déduire les modifications qui devront y être apportées dans le cas d'un mouvement varié suivant une loi quelconque.

327. Considérons d'abord le cas où le levier repose sur l'excentrique par son extrémité saillante formée par une cheville ou un galet.

Soit AB un levier mobile autour du point A (fig. 286), le point B doit être amené de B en K par l'action d'une surface courbe dans le même temps que la puissance fera décrire au point B une partie de la circonférence BY, la moitié par exemple, qu'elle tourne dans un sens ou dans l'autre.

Supposons la ligne AB horizontale, et la résistance un poids agissant au point B. Divisons l'arc BK en n parties égales (si l'on voulait que ce fût le travail de la résistance qui fût constant, ce serait la corde BK qu'on diviserait en parties égales; on mènerait par les divisions de celle-ci des parallèles à AB). En joignant les points de division de l'arc BK au centre A, on aura les angles que

devra parcourir le levier AB pour que le mouvement soit uniforme, ou dans le second cas pour que la résistance parcoure des chemins égaux en des temps égaux. La courbe de l'excentrique devra passer par les divisions successives de BK, lorsque des divisions de même rang 1, 2, ... n de la demi-circonférence viendront coïncider avec BC. Joignons le centre C avec les divisions de BK, et divisons la circonférence en n parties égales. Soit un de ces rayons Cβ, correspondant à la quatrième division Cα.

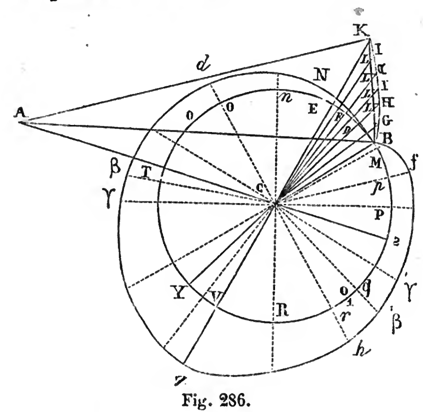


Fig. 286.

Comme le levier tourne dans le même sens que la circonférence pour le mouvement de gauche à droite, la rotation totale sera la somme des deux rotations, donc ce ne sera pas le point β qui arrivera en α pour la rotation voulue, mais un point γ tel que $BC\gamma = BC\beta + BC\alpha$. On a donc la direction $C\gamma$, et prenant $C\gamma = C\alpha$, γ sera un point de la courbe cherchée.

On aura de même n points de la courbe cherchée, et on pourra ainsi la tracer.

328. Pour la courbe de gauche, la rotation totale est la différence des deux rotations ; une ligne $C\gamma'$ correspondant aux points β' et α sera déterminée par la différence $BC\beta' - BC\alpha = BC\gamma'$.

La différence angulaire des deux courbes sera BCK, et la première sera plus longue que la seconde.

Si le mouvement angulaire du levier devenait nul, ce qui aurait lieu si le centre était à l'infini, s'il s'agissait d'un mouvement rectiligne, les courbes deviendraient symétriques comme nous l'avons vu art. 313.

Si le point B, auquel la résistance est appliquée, est à une distance un peu grande de l'axe C, il peut être incommode de se servir d'une courbe agissant sur le point B. On peut alors placer le mentonnet en un point quelconque B′ du levier, et raisonner sur l'arc B′ K′ que décrit ce point comme nous avons raisonné sur B K, toutefois en se servant, si l'on veut que le travail soit uniforme, des points de rencontre des lignes A I, A α..., déterminés comme ci-dessus, avec B′ K′, pour construire la courbe.

329. Si au lieu de faire agir l'excentrique par un mentonnet, une cheville pénétrant dans une rainure, on voulait que l'excentrique agît sur le plat du levier, on raisonnerait encore comme précédemment, en remplaçant les n lignes qui joignent les points de division au centre par les n perpendiculaires abaissées de ce centre sur les positions successives du levier, qui donneront les longueurs des rayons correspondants à n divisions (fig. 287). La courbe

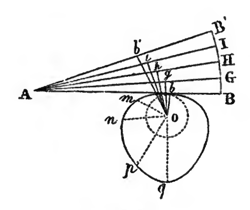


Fig. 287.

ainsi tracée conduit le levier sans chocs, mais ne peut servir que par sa partie droite, car pour la partie gauche les rayons vecteurs de l'excentrique plus longs que la perpendiculaire, peuvent rencontrer le levier avant celle-ci. On néglige dans cette construction la condition de la vitesse uniforme d'élévation.

Si dans le premier système la vitesse du mouvement circulaire alternatif ne devait pas être uniforme, il faudrait diviser l'arc dé-

crit par l'extrémité du levier, en parties correspondantes aux diverses positions qu'il doit occuper après des temps égaux, et déterminer de même les rayons correspondants de l'excentrique; sauf cette modification, la construction serait absolument la même que dans le cas du mouvement uniforme.

330. *Rainures au système conduit.* La cheville ou galet dans la fig. 286 est adaptée au système conduit, et la courbe au système qui conduit. On peut employer encore l'arrangement inverse, adapter les courbes au système conduit, et la cheville au système qui conduit.

La fig. 288 représente un semblable arrangement dans lequel le mouvement de révolution d'une cheville excentrique c, parcourant la rainure rectiligne pratiquée dans un levier tournant autour du point b, produit le mouvement alternatif.

C'est la même combinaison que celle de l'art. 243, mais dans ce cas la cheville c toujours située du même côté du centre b produit le mouvement alternatif, tandis que dans le cas rappelé le centre b étant placé à l'intérieur du chemin parcouru par la cheville, la rotation est continue.

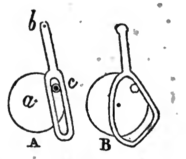


Fig. 288. Fig. 289.

La même formule trouvée art. 243 s'applique très bien aux deux cas, en faisant R rayon de la manivelle, moindre que E distance des deux centres, pour le mouvement alternatif, et plus grand que E pour la rotation continue.

En donnant à la rainure une forme courbe, comme fig. 289, on peut obtenir un rapport quelconque de vitesse.

331. Proposons-nous de construire une semblable courbe pour le cas d'un mouvement uniforme, c'est-à-dire d'obtenir une courbe qui, adaptée au levier, soit telle que le plateau mû d'un mouvement uniforme portant une cheville qui vient s'appuyer sur cette courbe, le mouvement du levier soit également uniforme.

Soit AB la position horizontale du levier (fig. 290), la résistance étant un poids appliqué en B. Divisons l'arc BK que ce point doit parcourir en n parties égales, joignons les points de division au cen-

tre A, les lignes AB, AQ... représenteront les positions successives que devra occuper le levier à des intervalles égaux.

Si on voulait que ce fût le travail de la résistance qui fût uniforme, c'est la perpendiculaire abaissée du point K sur AB ou la corde BK qu'il faudrait diviser en *n* parties égales; les parallèles à AB, menées par les points de division, rencontreraient BK en des points P, Q, R, qui détermineraient les positions successives du levier AP, AQ, AK, après des temps égaux.

Soient OL, DL, deux arcs de cercle que la cheville devra par-

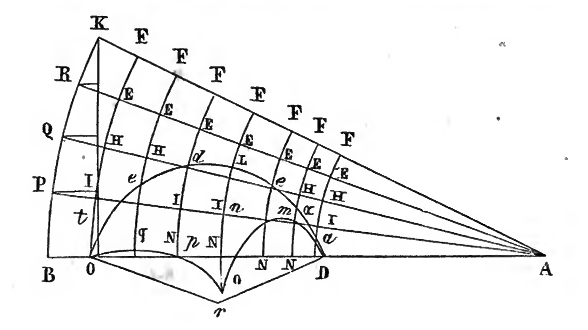


Fig. 290.

courir dans le même temps, en marchant de gauche à droite ou de droite à gauche en tournant autour du centre *r*. Divisons chacun de ces arcs en *n* parties égales et faisons passer par chaque point de division des arcs de cercle décrits du centre A, qui représenteront les chemins que décriront les divers points du levier. Chacun de ces points de division représentera une position de la cheville qui correspondra à une position du levier. Cela posé, il est facile d'obtenir les points des courbes correspondants aux *n* divisions et par suite ces courbes mêmes.

Soit par exemple L la dernière division correspondant à la position AK du levier, lorsque la cheville sera en L, le levier devra être en AK, si donc nous prenons sur l'arc passant par le point L, L*o* = FN, *o* sera le point cherché, le levier sera relevé d'une

quantité F L égale à la saillie de la courbe de plus que si la cheville parvenue au point L agissait seulement sur le levier. Pour tout autre point on raisonnera de même, ainsi pour la deuxième division α, correspondant à la seconde position A Q du levier dans la rotation de droite à gauche, prenant $H\alpha = \alpha m$, le point m sera un point de la courbe. On construira ainsi tous les points de la courbe, tels que la cheville y étant placée relève le levier à la position indiquée.

332. *Frottement.* Le frottement pourra s'obtenir pour le cas actuel, par une méthode semblable à celle indiquée art. 326. Il est bien évident que le chemin parcouru par le frottement sur tout le contour des courbes est considérable, et que par suite ces organes sont impropres à transmettre de grands efforts.

AXES NON PARALLÈLES.

MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF.

333. Les excentriques appliqués à produire le mouvement circulaire alternatif jouissent de la propriété importante de communiquer le mouvement, quel que soit l'angle que fasse l'axe autour duquel ils tournent avec le levier oscillant. En effet, l'excentrique agissant sur le plat du levier (si l'action était communiquée à l'aide d'une cheville se réduisant à un point, ceci ne serait plus vrai et il faudrait alors recourir à des systèmes semblables à ceux que nous allons décrire pour le cas suivant), cette face du levier devient un flanc d'une grande longueur que l'excentrique rencontre toujours. La poussée peut donc toujours avoir lieu, et toujours par une ligne, si le contour de l'excentrique est formé par une surface dont la face du levier représentera le plan tangent dans toutes les positions du contact. Dans la pratique toutefois, le plan de l'excentrique ne doit pas faire un angle très différent de zéro ou d'un droit, autrement le chemin parcouru par le frottement serait trop considérable.

MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF.

334. L'importante propriété dont nous venons de parler n'existe plus pour un excentrique semblable à ceux décrits ci-dessus, dont

le plan ne comprend pas la direction du mouvement rectiligne. En effet, la poussée ne pouvant avoir lieu que par un point unique, tel que l'extrémité de la barre, si celle-ci fait un angle très petit avec le plan, le mouvement pourra se communiquer dans la pratique si l'excentrique a une épaisseur suffisante; mais s'il est un peu grand, le point de contact échappera évidemment bientôt du contour de l'excentrique.

335. Toutefois, si au lieu de se limiter à des excentriques plans on considère des rainures courbes, le problème peut être résolu.

Si la direction du mouvement de la barre n'est pas parallèle à l'axe de rotation, la surface dans laquelle doivent être pratiquées les rainures devient un cône ou un hyperboloïde engendré par la rotation autour de l'axe, par la ligne qui est la direction du mouvement.

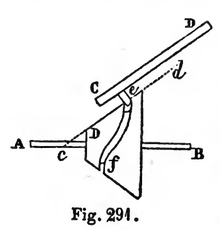


Fig. 291.

Ainsi dans la fig. 291 AB est l'axe, CD la barre glissante, *e* la cheville, *cd* la direction du mouvement, qui dans cet exemple est supposé rencontrer l'axe en *c*. La ligne *cd* en tournant autour de la surface engendre un cône D en tournant autour de AB, et la cheville doit être engagée dans une rainure tracée sur la surface conique. Si la surface est développée, la rainure *ef* (pour un mouvement régulier) devient une spirale d'Archimède.

Il est inutile d'entrer dans le détail de toutes les formes et combinaisons qui peuvent être ainsi obtenues; nous nous bornerons au cas le plus remarquable, celui où la direction du mouvement est parallèle à l'axe.

336. Il est facile de voir que la disposition convenable dans ce cas revient à celle de la vis qui, servant à produire le mouvement rectiligne continu pour une direction rectiligne parallèle à l'axe, fournira une solution par l'emploi d'une double vis comme le représente la fig. 292.

Sur la circonférence d'un cylindre on trace deux hélices complètes, l'une à droite partant de *a* et passant par *mbcdf* arrive en *g*, l'autre à gauche, qui commence en *g* et passe par *ohkl*

pour rejoindre la première en *a*. Ces deux hélices forment un tracé fermé, se continuent l'une l'autre, et permettent au cylindre d'agir d'une manière continue. Lorsqu'il tourne, la pièce E, qui passe dans une rainure et qui est attachée à la pièce glissante, prend un mouvement alternatif d'avant en arrière et *vice versâ;* chaque os-

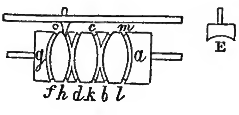


Fig. 292.

cillation correspond à une ou plusieurs révolutions du cylindre, en raison des révolutions de l'hélice.

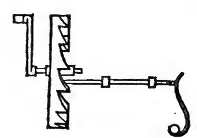
Comme les rainures héliçoïdales se coupent nécessairement deux fois par chaque révolution, la pièce E doit être plus longue que la rainure comme nous l'avons représenté à part; il devient alors impossible qu'elle quitte une rainure pour l'autre aux croisements. En outre, comme les inclinaisons des filets sur la barre sont de directions opposées, il faut que la pièce E soit attachée à la barre par un point comme le montre la figure, pour qu'elle tourne d'un petit angle aux changements d'inclinaison.

Si la barre doit se mouvoir plus rapidement dans une direction que dans l'autre, l'inclinaison d'une rainure doit être plus rapide que celle de l'autre; de même, en variant son inclinaison dans différents points, on variera le rapport des vitesses.

Ce système convient très bien pour le cas où une oscillation du mouvement rectiligne correspond à un certain nombre de rotations, et ne pourrait être employé s'il fallait produire moins d'une oscillation double pour une révolution de l'axe.

Dans le cas où il faudrait plusieurs oscillations pour un tour, on pourrait l'obtenir par la disposition des excentriques que nous allons décrire.

337. La direction du mouvement rectiligne étant parallèle à l'axe de rotation, et par suite restant toujours à une distance constante de celui-ci, si l'on fixe une roue sur l'axe de rotation, et que


Fig. 293.

sur le plat de cette roue (fig. 293) on adapte des saillies de forme convenable, limitées par la circonférence, on aura un système très convenable d'excentriques.

Si en chaque point de ces saillies la hauteur est proportionnelle à la base mesurée sur la circonférence, si le profil de leur contour est héliçoïdal, la vitesse du mouvement rectiligne sera évidemment proportionnelle à celle du mouvement circulaire, et uniforme si celle-ci est de cette nature.

338. Cette disposition se réduit à la suivante dans le cas d'une seule oscillation de va-et-vient pour chaque tour.

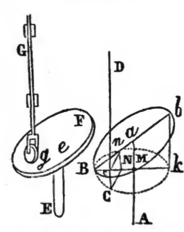


Fig. 294. Fig. 295.

E *e* est un axe tournant (fig. 294), G*g* une barre pouvant glisser dans le sens de sa longueur et portant en *g* un galet. Un plan circulaire F est fixé à l'extrémité de l'axe E ; ce plan ne lui est pas perpendiculaire, et la barre G*g* reste toujours en contact avec le plan par l'effet d'un poids ou d'un ressort. Si le plan était perpendiculaire à l'axe il n'y aurait pas de mouvement communiqué à la tige, mais par suite de l'inclinaison un mouvement alternatif lui est imprimé dans le sens de sa longueur, et la grandeur de celui-ci varie avec l'inclinaison du plan sur l'axe. S'il est ajusté de manière à ce que l'inclinaison puisse varier à volonté, on obtiendra exactement la longueur du mouvement rectiligne voulu.

Il est facile de calculer le rapport des vitesses des deux mouvements. En effet, soit A*a* l'axe vertical du système (fig. 295), B le point le plus bas de l'extrémité de la barre, B*a*A l'angle d'inclinaison du plan sur l'axe. Soit CD la barre glissante, B*ck* le plan de rotation du point B.

Dans le mouvement du rayon BM vers MC, en décrivant l'angle BMC, l'extrémité C de la barre parcourt verticalement l'espace *c*C.

Menant C N perpendiculairement à B M, N n est égal et parallèle à C c, et on a :

$$Cc = \frac{BN}{\text{tang. } B a A} \text{ et } aM = \frac{BM}{\text{tang. } B a A}.$$

D'ailleurs B N = B M sin. vers. B M C, d'où :

$$Cc = \frac{BM \text{ sin. vers. } BMC}{\text{tang. } B a A} = aM \text{ sin. vers. } BMC,$$

c'est-à-dire que le mouvement de la barre est précisément le même que celui que produirait, à l'aide d'une bielle infinie (engendrant un mouvement rectiligne), une roue dont le rayon serait aM (art. 294).

339. *Réciproque des solutions précédentes.* Nous montrerons ci-après (art. 360) que les excentriques ne peuvent jamais être employés que comme nous l'avons supposé jusqu'ici, c'est-à-dire à produire un mouvement circulaire ou rectiligne alternatif à l'aide d'un mouvement circulaire continu, que le mouvement ne saurait être produit inversement.

Deuxième section. — Condition de maximum non satisfaite.

Parmi les organes que nous allons étudier nous ne rencontrerons que des organes agissant par contact immédiat, le système d'intermédiaires rigides (le seul possible pour engendrer seul le mouvement alternatif), composé de la bielle et de la manivelle, satisfaisant à la condition du maximum. Ce ne serait qu'autant que les articulations permettraient certain mouvement que le système rentrerait dans le cas actuel, et nous l'avons déjà étudié art. 301.

Organes agissant par contact immédiat.

AXES PARALLÈLES.

SYSTÈMES A INTERMITTENCES.

340. *Cames.* Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les courbes qui forment les excentriques étaient continues, ne formaient pas de ressaut, c'est-à-dire que jamais en passant d'un

point de contact à un autre point infiniment voisin angulairement, le rayon vecteur ne décroissait d'une quantité finie. Lorsque le contraire a lieu, il y a discontinuité du mouvement, et choc lors de la reprise des saillies successives; la propriété fondamentale des excentriques disparaît donc dans ce cas. Ces saillies, qui prennent le nom des *cames,* sont fréquemment employées dans les machines lorsque le mouvement alternatif doit être séparé par des intervalles de repos, et que des conditions spéciales de l'emploi des machines contraignent à ne pas tenir compte des chocs qui se produisent dans un pareil système, toujours défectueux sous ce rapport.

Ces systèmes sont surtout employés pour produire plusieurs oscillations du mouvement alternatif pour un tour du mouvement circulaire continu, et on trace en général les courbes des cames de manière à ce que les deux mouvements soient dans un rapport de vitesse constant pendant la durée du contact.

MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF.

341. La fig. 296 montre la disposition de cames servant à mettre en mouvement un marteau emmanché à l'extrémité d'un levier. Ces cames doivent être suffisamment espacées, pour que le levier sur lequel elles agissent ait pu reprendre sa première position par l'action de la pesanteur ou d'un ressort, quand l'action d'une came vient à succéder à celle de la précédente; action qui ne peut avoir lieu sans un choc résultant de la rencontre du levier en repos par la came en mouvement.

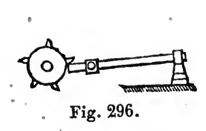


Fig. 296.

La courbe des cames s'obtient de la même manière que s'il s'agissait d'un engrenage à flancs; l'extrémité du levier pouvant être considéré comme un rayon de cercle, et sa forme étant plane, correspond au flanc d'un engrenage épicycloïdal; le profil des cames est donc fourni par l'épicycloïde décrite par la circonférence primitive, ayant pour diamètre le rayon de la circonférence primitive dont le centre est sur l'axe du levier. Mais comme on n'a en général aucune raison pour tenir à ce que le mouvement ascendant du marteau soit

uniforme, le tracé exact de cette courbe est de peu d'importance dans la pratique. On termine la came au point par lequel elle doit toucher le levier dans sa position la plus élevée, le levier doit lui-même se terminer en ce point.

On détermine le nombre de cames d'après la vitesse que doit avoir la roue et le nombre de coups que l'on veut frapper par minute.

Quelquefois la came saisit le marteau par la partie moyenne, quelquefois près de la tête.

342. *Frottement.* La came étant tracée en épicycloïde, l'angle θ décrit par le levier est trop grand pour qu'on puisse lui appliquer, pour calculer le frottement, la formule que nous avons trouvée pour les engrenages en supposant cet angle très petit. M. Poncelet a montré que la formule qui donne l'effort moyen nécessaire pour vaincre le frottement, devient alors :

$$fQ \frac{R+R'}{RR'} \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\theta^3}{2.3}\right),$$

a étant le pas des cames ; et que le travail consommé par le frottement pendant que la came parcourt un arc $R'\theta$ est :

$$fQR' \frac{R+R'}{R} \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{3.4}\right).$$

343. Pour éviter le choc, si nuisible dans les machines, il faut, toutes les fois que cela est possible, remplacer les cames par un excentrique continu, après avoir préalablement transformé, s'il est nécessaire, le mouvement circulaire continu en un autre, tel qu'une rotation dure le même temps qu'une oscillation du levier. La courbe ne doit alors jamais abandonner le corps à lui-même, pour ne pas le rencontrer au repos lorsqu'elle marche elle-même avec une certaine vitesse. Telle serait pour le cas d'un marteau, l'excentrique tracé

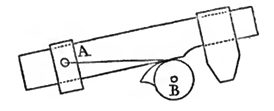


Fig. 297.

comme celui que représente la fig 297, c'est-à-dire tel qu'au point le

plus bas de la course du marteau il fût à très peu près tangent à une droite, menée par le centre du mouvement du marteau tangentiellement au cylindre qui est monté sur l'axe de rotation.

MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF.

344. Les *cames* servent à produire un mouvement rectiligne intermittent en agissant soit sur des chevilles ou mentonnets, soit sur des entailles pratiquées dans les tiges guidées verticalement. Tel est le cas des pilons.

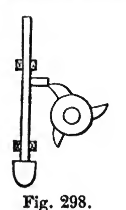


Fig. 298.

Le tracé pour une élévation uniforme, est évidemment le même que celui d'une crémaillère, avec la condition que les dents en forme de développantes soient assez espacées pour que le pilon ait la liberté de retomber après chaque soulèvement. Le profil de ces dents (figure 295) sera donc formé d'une développante de cercle.

345. *Frottement.* Le frottement sur la came, ou mieux l'effort moyen nécessaire pour vaincre le frottement pendant que la tige parcourra le chemin a, sera $fQ\frac{a}{R}$, R étant le rayon du cercle tangent à la droite parcourue par le point de contact, si toutefois la course est assez courte pour qu'on puisse appliquer à ce cas la formule trouvée pour évaluer le frottement de la crémaillère.

346. Les cames agissant contre les pilons au repos, et contre des mentonnets éloignés de l'axe des cylindres, constituent un appareil défectueux; car, outre le frottement dont nous avons parlé, il se produit un choc lors de la rencontre de la came et du pilon, enfin l'éloignement du mentonnet de l'axe de la tige fait naître une action de déversement et par suite un frottement contre une des moises inférieures et une des moises supérieures qui la maintiennent.

Nous renvoyons au cours de M. Poncelet pour l'évaluation de ces résistances; nous dirons seulement comment on a cherché à les diminuer.

Dans la pratique, une même roue met en général en mouvement plusieurs pilons placés les uns à côté des autres, ou, pour mieux

dire, on remplace la roue par un cylindre d'une certaine longueur, sur lequel sont espacées les cames, disposées suivant une hélice si les pilons sont également distants et doivent être soulevés à intervalles égaux par le mouvement uniforme du cylindre. C'est ce qu'on appelle une *batterie de pilons*.

347. Pour diminuer le frottement on peut, comme dans le cas précédent, remplacer la came par un excentrique assemblé à un cercle extrêmement voisin de l'extrémité du mentonnet au point le plus bas de la course du pilon (si la position de ce point n'est pas variable) et tangent à l'origine à cette circonférence (fig. 299).

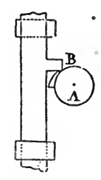
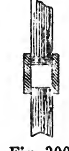


Fig. 299.

348. Quant à l'action de la came sur l'extrémité du mentonnet, tendant à déverser la tige du pilon et à faire naître des frottements considérables sur les guides qui la maintiennent, on l'évite quelquefois en pratiquant dans la tige du pilon (fig. 300) une ouverture pour le passage de la came qui peut alors agir dans l'axe même du pilon.


Fig. 300.

Un rouleau placé à la partie supérieure de l'entaille diminue beaucoup le frottement, au moins jusqu'à ce que l'usure empêche ce rouleau de tourner.

Quand on ne peut affaiblir ainsi le pilon, on peut lui adapter un anneau portant deux saillies dont la direction commune passe par 'axe, et que rencontrent deux cames semblables entre elles agissant simultanément.

SYSTÈMES QUI DÉRIVENT DES ENGRENAGES.

349. Si l'on réfléchit à la nature intime des divers systèmes que nous venons d'étudier, on reconnaîtra facilement que les solutions qui résultent des organes agissant par contact immédiat, que cette communication du mouvement d'une courbe à une autre courbe,

ne diffèrent de la solution adoptée pour les engrenages qu'en ce que le mouvement alternatif étant le plus souvent limité à des angles peu considérables s'il est circulaire ou de peu de longueur s'il est rectiligne, on peut se contenter de munir le système conduit d'une seule dent, et la conduire par une courbe de forme convenable, adaptée à la roue conductrice. On se limite généralement au cas le plus simple, celui où cette dent est une cheville, un fuseau, qui offre l'avantage de pouvoir se transformer en un galet qui diminue le frottement.

Si au contraire, on munit le système conduit de dents multiples, on rentre alors dans le cas général des engrenages, le rapport de vitesses est généralement constant et tout ce que nous avons dit au sujet des engrenages devient applicable; alors, comme le système ne devient plus libre après l'action sur la dent unique, et comme cela a déjà lieu avec l'espèce d'engrenage intérieur ou extérieur que forme chaque face d'une rainure, les mouvements alternatifs sont en réalité engendrés par deux systèmes de mouvements continus se succédant dans des directions opposées.

MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF.

350. Soit A l'axe autour duquel a lieu le mouvement circulaire continu, B celui autour duquel il s'agit de produire un mouvement circulaire alternatif. Montons sur A et B deux roues dentées qui engrènent dans les rapports de vitesse voulus; si l'engrenage est extérieur, B se mouvra dans un sens, et dans le sens contraire s'il est intérieur. Le problème sera donc résolu à l'aide de deux moitiés de roues dentées (figure 301), engrenant l'une intérieurement, l'autre extérieurement, assemblées à l'arbre B et mues successivement par la roue montée sur l'arbre A.

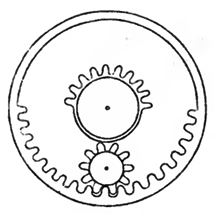


Fig. 301.

Dans la pratique on emploie les dispositions suivantes qui sont en réalité complexes, c'est-à-dire qui, outre les deux mouvements circulaires, supposent la possibilité d'un autre mouvement rectiligne alternatif.

351. Soit un disque de métal tournant autour du centre C (figure 302). Sur la face du disque est fixé un anneau coupé *am,*

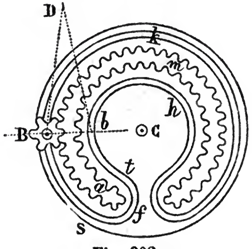


Fig. 302.

dont le contour est taillé en dents. Le pignon B, porte des dents de forme convenable et son axe est monté de manière à avoir la faculté de se mouvoir dans la direction BC, ce qu'on obtient en guidant son extrémité dans une rainure pratiquée dans le disque. Il est ainsi successivement en contact avec tous les points de la rainure BS*ftbhk,* à une distance des circonférences primitives de l'anneau, égale au rayon du pignon, estimée normalement à celles-ci.

Si le pignon placé comme sur la figure tourne de B vers S, le disque tourne dans une direction opposée ; mais quand il arrive vers la partie *f*, la rainure, dans laquelle passe son axe, le ramène d'avant en arrière et le fait agir sur les dents de l'intérieur de l'anneau. Le disque tourne alors dans le même sens que le pignon, et cette action continue jusqu'à ce qu'il repasse par la partie *f* et que le mouvement soit de nouveau renversé.

Le rapport des vitesses est constant pendant toute la durée du mouvement dans chaque direction, mais plus petit lorsque l'engrenage est intérieur que quand il est extérieur (la différence est moindre toutefois que dans le système de la fig. 301), car le rayon de l'engrenage intérieur est nécessairement moindre que celui de l'engrenage extérieur. Le changement de direction n'est pas instantané, la partie S*ft* de la rainure qui réunit celle intérieure et celle extérieure étant d'une certaine étendue (elle est formée d'un demi-cercle) ; bien que la variation ne satisfasse pas complétement à la

condition du maximum, toutefois la vitesse dans un sens diminue graduellement quand l'axe du pignon passe de S à f, puis reprend graduellement en sens inverse en passant de f à t pour se mouvoir alors avec la vitesse qui correspond au cercle intérieur.

352. Souvent la roue coupée est formée de chevilles enfoncées dans un disque comme le représente la fig. 303. Dans cette disposition les circonférences primitives de l'une et de l'autre roue du disque sont les mêmes, et aussi le rapport de vitesse le même que le pignon soit au dedans ou dehors; de plus, l'espace que le pignon doit parcourir pour passer d'un mouvement à l'autre, est réduit.

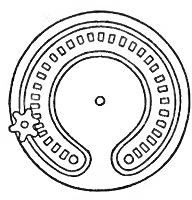


Fig. 303.

353. Cet espace peut être encore plus diminué, en disposant les dents comme dans la figure 304, c'est-à-dire en faisant de la roue la plus éloignée du centre celle de l'engrenage intérieur; mais en même temps la différence entre les deux rapports de vitesse est augmentée.

354. Dans les figures qui précèdent les formes des dents sont déterminées par les principes généraux déjà exposés en traitant des engrenages. Toutefois, la disposition de la figure 303 exige quelques considérations particulières.

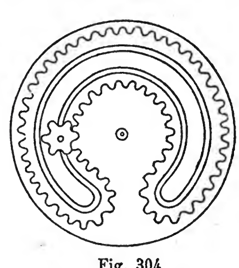


Fig. 304.

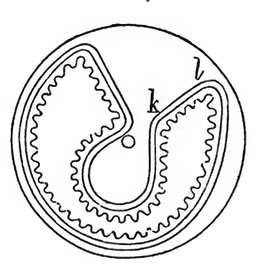


Fig. 305.

Chaque dent d'un pareil système peut être considérée comme formée de deux dents placées dos à dos, la circonférence primitive

commune passant par leur milieu. La partie extérieure est formée de dents d'une roue extérieure, et la partie intérieure d'après les conditions auxquelles doivent satisfaire les dents d'une roue menée intérieurement.

On obtient les formes convenables à l'aide d'un cercle ayant pour diamètre le rayon du cercle primitif du pignon, et qui roule extérieurement ou intérieurement sur la circonférence primitive de la roue. Les deux dents des extrémités doivent être circulaires, leur centre se trouver sur la circonférence primitive et leur diamètre être égal à la moitié de la saillie de la dent du pignon.

355. *Rapport de vitesses variable.* S'il est demandé que le rapport des vitesses varie, alors les courbes primitives ne doivent plus être des courbes concentriques au disque. Ainsi dans une pareille disposition représentée fig. 305, la rainure kl est dirigée vers le centre du disque, et quand le pignon touche cette partie il ne peut imprimer aucun mouvement au disque; dans les autres parties le rayon vecteur varie et aussi le rapport des vitesses angulaires.

MOUVEMENT RECTILIGNE ALTERNATIF.

356. Quand la pièce à mouvement alternatif se meut en ligne droite, on emploie une crémaillère dont les dents sont le plus souvent de simples fuseaux, système qui n'est pas convenable pour les anneaux des systèmes précédents (puisque les dents qui engrènent avec le même pignon doivent être différentes dans l'engrenage extérieur et dans l'engrenage intérieur).

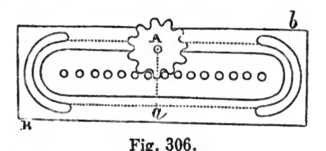


Fig. 306.

Bb est la pièce glissante (fig. 306), A le pignon qui conduit et dont l'axe peut passer de A en a, la distance Aa étant égale à son diamètre; ce changement se produit à chaque extrémité du mouvement rectiligne. Les dents de ce système pourraient recevoir toutes les formes convenables aux divers systèmes de crémaillères.

357. Dans le système suivant on a remplacé le mouvement du pignon par celui de la crémaillère.

B *b* est la pièce qui reçoit le mouvement alternatif (fig. 307) (qui est guidée par des rouleaux comme on le fait toujours dans la pratique), A est le pignon qui conduit. La double crémaillère C*c* est formée de deux bandes opposées, et une double rainure dans laquelle passe la tige du pignon court parallèlement aux dents.

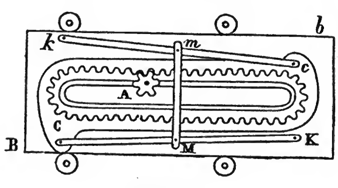


Fig. 307.

La crémaillère est assemblée avec la plaque B *b*, de telle sorte que son mouvement transversal puisse se produire lorsque le pignon se trouve vers l'extrémité de la crémaillère ; de la sorte le pignon peut successivement engrener avec les dents de chaque côté.

Deux leviers-guides K C, *k c* sont fixés d'une part en K, *k* à la pièce en mouvement alternatif et de l'autre en C, *c* à la crémaillère. Ces leviers sont assemblés par leur milieu à un autre levier M *m*, auquel est imprimé un petit mouvement transversal lorsque le changement de sens doit avoir lieu. Le mouvement des deux leviers autour de leurs axes K, *k* est le même, et comme leur mouvement est très petit et leur direction presque parallèle à celle du mouvement rectiligne, leurs extrémités C, *c* se meuvent sensiblement perpendiculairement à celui-ci, et conséquemment la crémaillère qui est assemblée avec leurs deux extrémités se meut aussi perpendiculairement à sa direction comme il est nécessaire.

358. *Double crémaillère et partie de pignon.* Tous ces systèmes sont en réalité complexes, c'est-à-dire qu'ils supposent que l'axe du pignon peut prendre un mouvement rectiligne alternatif outre ceux qui font l'objet de la transformation. Quand il n'en est pas ainsi on peut employer le système représenté fig. 308. Il se com-

pose de deux crémaillères placées en regard et montées sur le même châssis, entre lesquelles tourne une partie de pignon. Celle-ci tournant toujours dans le même sens, engrènera successivement avec chacune des crémaillères, et le mouvement de rotation de l'axe communiquera à la barre, dans un rapport constant, un mouvement rectiligne alternatif.

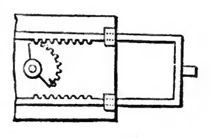


Fig. 308.

Nous n'avons pas besoin de répéter l'observation que de pareils systèmes, qui donnent lieu à des chocs à chaque reprise du mouvement, sont défectueux par ce motif.

AXES NON PARALLÈLES.

359. Si les axes ne sont pas parallèles, les solutions du problème, pour les organes de la nature des derniers que nous venons d'examiner, sont données directement par la théorie générale des engrenages; nous n'avons donc pas à nous y arrêter longuement.

La roue mue d'un mouvement circulaire continu étant armée de dents sur toute sa circonférence, il faudra munir l'arbre qui devra prendre un mouvement circulaire alternatif de parties d'engrenage extérieur et intérieur agissant successivement, et les dents seront tracées comme dans le cas des engrenages coniques si les deux axes se rencontrent, comme dans le cas des engrenages hyperboloïdiques si les deux axes ne se rencontrent pas et ne sont pas parallèles.

S'il s'agissait d'un mouvement rectiligne, la solution serait encore la même en remplaçant les deux parties de roues dentées par deux longueurs de crémaillères.

Il n'y a pas lieu d'insister beaucoup sur des dispositions trop compliquées pour la pratique; nous donnerons seulement un exemple qui se rencontre quelquefois pour des axes des deux mouvements circulaires à angle droit; dans ce cas la solution générale devient plus simple.

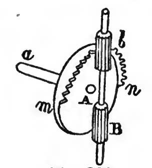


Fig. 309.

Soit A*a* un axe (figure 309) qui tourne toujours dans la même direction, B*b* un autre axe à angle

droit sur le premier, auquel il s'agit de communiquer, pour une rotation de celui-ci, un certain nombre de rotations qui auront lieu alternativement dans un sens et en sens contraire.

Ce dernier axe porte deux pignons B et *b* ; le premier porte une fraction de roue dentée, une moitié de circonférence par exemple, de *m* en *n*. Si l'on suppose que la roue tourne de *n* vers *m*, les dents agissant sur le pignon *b*, l'axe B*b* tourne. Mais quand la dernière dent *n* quitte le pignon, cette rotation cesse; puis, lorsque la première dent *m* vient engrener avec B, le mouvement de l'axe reprend un sens contraire.

Le système de doubles rainures héliçoïdales que nous avons donné plus haut comme dérivant de la vis, est la solution correspondante à la précédente pour le mouvement rectiligne alternatif.

Pour les systèmes à intermittences nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit pour les excentriques, dont ces systèmes ne sont que des tracés particuliers.

Solution du problème réciproque du précédent.

360. Les systèmes qui dérivent des engrenages sont évidemment réciproques, c'est-à-dire que le mouvement alternatif peut engendrer par leur intermédiaire le mouvement continu; pourvu toutefois pour quelques-uns, que l'inertie, comme cela a toujours lieu dans la pratique, assure la continuation du mouvement continu lors du changement de sens du mouvement alternatif, lorsque l'action dans un sens a cessé et n'a pas encore lieu dans l'autre sens.

Il n'en est pas de même des cames et excentriques; ils ne fournissent pas en général un système à l'aide duquel un mouvement alternatif puisse produire un mouvement circulaire continu. En effet, en nous reportant à la similitude établie entre les excentriques et les engrenages, avec le système de deux roues dentées, lorsque les dents de l'une se réduisent à une dent unique, on voit que les rayons vecteurs menés des deux centres au point de contact pendant le cours de la rotation, passent toujours par un point où ils sont à angle droit. En effet, l'inclinaison du rayon vecteur de l'excentrique sur la direction du levier devant changer de sens, puisque la dent unique doit faire un tour entier pour une fraction

de tour du levier, passe nécessairement par un angle droit ; en ce point la communication de mouvement s'arrêterait nécessairement, le mouvement circulaire ne pourrait plus se continuer. Il en serait de même pour le mouvement rectiligne, lorsque celui-ci agirait sur une tangente perpendiculaire à sa direction qui serait aussi celle du rayon passant au point de contact. Ces systèmes ne sont donc pas à retour et les mouvements alternatifs ne peuvent, à l'aide d'un excentrique, engendrer un mouvement circulaire continu.

VI.

RECTILIGNE CONTINU EN CIRCULAIRE ALTERNATIF.

361. Le mouvement rectiligne continu étant produit par le système plan et le mouvement circulaire alternatif par le système levier, les solutions directes pour cette transformation consistent à établir une communication entre deux systèmes de ce genre. Ces solutions sont moins usitées dans la pratique que celles encore simples que l'on obtient à l'aide des moyens déjà décrits, en introduisant un mouvement circulaire continu comme intermédiaire.

Remarquons d'abord que, d'après la nature du mouvement rectiligne continu, les articulations ne peuvent pas fournir de solution; qu'elle ne pourra résulter que d'organes agissant par contact immédiat, ou au plus par assemblages momentanés. Les solutions se réduisent donc à celles qui correspondent au système des excentriques et au système des engrenages, pour la conversion du mouvement circulaire continu en circulaire alternatif, enfin aux encliquetages, systèmes qui jouissent de propriétés déjà étudiées.

Organes agissant par contact immédiat.

362. *Rainures.* Aux excentriques tournant autour d'un centre situé à l'infini correspondent des lignes droites ou courbes, des plans inclinés tracés sur la pièce qui se meut en ligne droite. Si, pour rendre leur action possible dans les deux directions du mouvement alternatif on les trace doubles (fig. 310), c'est-à-dire qu'on pratique

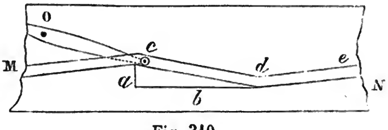


Fig. 310.

comme dans les cas précédents une rainure dans la pièce qui se meut en ligne droite, et que dans cette rainure on engage la cheville

ou galet faisant corps avec le levier, il est évident que celui-ci aura un mouvement de va-et-vient, dont l'amplitude, aussi bien que le rapport des vitesses, sera déterminée par le tracé des rainures.

Si elles sont rectilignes, l'extrémité du levier qui se meut sensiblement en ligne droite, si le chemin est de peu d'étendue, parcourra pour une hauteur a du plan incliné, si β est l'angle du petit arc décrit avec la hauteur a, un arc égal à $\frac{a}{\cos.\ \beta}$, pendant que la base parcourra le chemin b; le rapport des vitesses sera $\frac{a}{b \cos.\ \beta}$. On devra toujours arrondir les angles pour que le changement de sens du mouvement ait lieu sans choc brusque, pour que la condition du maximum soit satisfaite.

Comme dans le cas des excentriques, le levier engagé dans la rainure (pourvu que celle-ci soit d'une largeur suffisante) peut recevoir un mouvement alternatif, quelles que soient les positions relatives de son axe de rotation et de la direction du mouvement rectiligne.

363. *Crémaillère double.* Si on combine un système composé d'une roue dentée et de deux crémaillères placées face à face, en supprimant alternativement des parties de celles-ci de manière que l'action ait lieu successivement de chaque côté (fig. 311), on aura

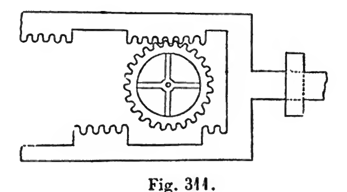


Fig. 311.

un système à l'aide duquel un mouvement circulaire alternatif de l'axe de la roue sera obtenu par le mouvement rectiligne continu du châssis. Dans ce système le rapport des vitesses est constant, mais il a les inconvénients déjà énoncés des systèmes alternatifs qui dérivent des engrenages, à savoir qu'il se produit nécessairement un choc aux changements de sens.

Ce système peut servir pour des positions quelconques de l'axe de rotation et de la direction rectiligne, en donnant aux dents de la roue et de la crémaillère une forme convenable. Toutefois, lorsqu'ils arrivent à être parallèles, auquel cas la crémaillère se confond avec une vis, il faudrait employer un système analogue à celui de la fig. 292, dans lequel des parties d'hélice ou autres courbes tracées à la surface du cylindre se succéderaient en sens contraire. Ce système, qui consisterait à produire une rotation par la pression du filet d'une vis sur la dent d'une roue, n'est pas admissible en pratique, comme nous l'avons fait voir en traitant de la vis sans fin.

Passons à la solution du problème réciproque du précédent, à la production du mouvement rectiligne continu à l'aide du mouvement circulaire alternatif, et disons d'abord que lorsque le premier est de peu de longueur, on fait quelquefois agir le levier directement sur l'extrémité de la pièce guidée en ligne droite.

364. *Encliquetages*. Une crémaillère à dents inclinées suivant un angle aigu avec le sens du mouvement est mue par deux crochets (fig. 312) dont les extrémités sont assemblées à une traverse

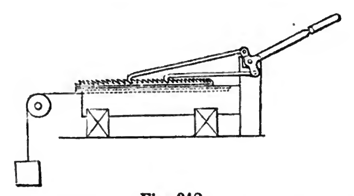


Fig. 312.

tournant autour du même axe qu'un levier, avec lequel elle est assemblée. Le mouvement circulaire alternatif du levier fera, à chaque demi-oscillation, avancer et engrener une des dents et opérera la traction par l'autre.

L étant la longueur du bras de levier auquel s'applique la force motrice, ω l'angle d'une oscillation, $L\omega$ sera le chemin parcouru pendant une oscillation par l'extrémité du levier.

r, r' étant les distances du centre des articulations des crochets à l'axe, $r\omega$, $r'\omega$ seront les chemins parcourus par le point d'attache des

encliquetages, φ, φ' étant les angles moyens que font ces chemins avec la direction du mouvement rectiligne, on aura sensiblement :

$r\omega \cos. \varphi + r' \omega \cos. \varphi' =$ chemin parcouru en ligne droite ; φ et φ' étant les plus petits possibles, pour que la pression des crochets sur la face postérieure des dents soit un minimum.

Les encliquetages ne peuvent servir qu'autant que la direction du mouvement rectiligne fait un très petit angle avec plan du mouvement alternatif; s'il en était autrement, il faudrait employer d'abord une transformation intermédiaire pour changer les plans d'un des mouvements.

365. L'encliquetage par pression agit de la même manière que le précédent. La fig. 313 montre comment le construit M. Saladin. Il se compose d'un bâti auquel sont fixées deux douilles servant de guides à une tige ronde. Entre les douilles est fixé un pivot sur lequel s'assemble le levier ayant un mouvement circulaire alternatif. A une extrémité de ce levier est fixé un second petit levier portant un anneau dans lequel passe la tige; un troisième petit levier assemblé au bâti porte également un anneau dans lequel passe aussi la tige. Lorsqu'on met en mouvement le grand levier pour faire monter la tige ronde, le second levier, placé à son extrémité, tend à descendre par son poids : il s'incline et enlève la tige, par suite de l'obliquité de la traction. Le second anneau placé sur le bâti et agissant en sens contraire de l'autre, retient la tige pendant que le levier reprend sa première position, sans suivre la tige dans son mouvement.

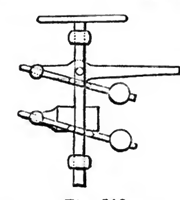


Fig. 313.

366. La véritable transformation usitée dans les machines, pour s'affranchir des résistances passives des solutions directes, consiste à transformer le mouvement circulaire alternatif en circulaire continu, au moyen d'une bielle et d'une manivelle, et celui-ci en mouvement rectiligne, au moyen d'une crémaillère ou d'une corde s'enroulant sur un cylindre.

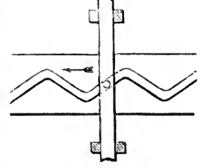
VII.

RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF.

367. Le mouvement rectiligne, tant continu qu'alternatif, étant produit par des systèmes de l'ordre plan, cette transformation ne pourra résulter directement que de l'action d'un système plan sur un autre système plan. Cette action ne peut être produite que par des organes agissant par contact immédiat, les intermédiaires ne pouvant fournir de solutions, les intermédiaires rigides essentiellement limités ne pouvant faire partie d'un mouvement rectiligne continu avec lequel ils se déplaceraient, et les intermédiaires flexibles ne pouvant agir que dans un sens, ne peuvent seuls communiquer un mouvement alternatif.

Organes agissant par contact immédiat.

368. *Directions des deux mouvements à angle droit.* Des rainures inclinées, pratiquées dans la pièce (fig. 314) ayant un mouvement rectiligne continu, et agissant sur une cheville adaptée à une barre ne pouvant prendre qu'un mouvement rectiligne, communiqueront à celle-ci un mouvement rectiligne alternatif, en agissant successivement sur la cheville par chacune de leurs faces.


Fig. 314.

Si α est l'angle de l'inclinaison du plan incliné que forme en chaque point la rainure avec la direction de la pièce mue d'un mouvement rectiligne continu, v étant la vitesse de celle-ci, v tang. α sera la vitesse du mouvement rectiligne alternatif produit à angle droit avec la direction du mouvement rectiligne continu. Ces rainures devront se raccorder par des courbes pour que la condition du maximum soit satisfaite.

369. *Directions faisant un angle 6.* Si au lieu d'être perpendiculaires entre elles, ces deux directions faisaient un angle 6, v étant la vitesse du mouvement rectiligne continu, v tang. α serait

la vitesse perpendiculairement à sa direction. Or celle v' de la pièce à mouvement alternatif multipliée par cos. $(90° - 6)$ sera égale à celle-ci ; donc enfin v' sin. $6 = v$ sin. α, et la vitesse v' du mouvement alternatif sera $\frac{v \text{ tang. } \alpha}{\sin 6}$.

370. *Directions quelconques.* Si les directions des deux mouvements étaient parallèles, comme si, sans être parallèles, elles ne se rencontraient pas, la transformation ne pourrait s'opérer qu'à l'aide d'une rainure, d'un plan incliné intermédiaire ; mais il n'y a pas lieu de s'arrêter à des solutions directes évidemment défectueuses, vu les frottements et résistances passives qui y prennent naissance. Le frottement doit se calculer ici comme nous l'avons fait pour le plan incliné, et tout ce que nous avons dit sur l'angle limite du mouvement s'applique à ce cas.

371. *Rapport de vitesses variable.* En donnant aux rainures inclinées une longueur et une inclinaison convenables, on pourra obtenir toute vitesse voulue, non seulement uniforme, mais encore variée en déterminant les courbes des rainures en raison de la loi du mouvement.

372. *Encliquetages.* Les encliquetages pourraient fournir le mouvement réciproque du précédent en combinant le système de l'art. 310 avec celui décrit dans le chapitre précédent.

OBSERVATIONS

Sur certaines transformations de mouvements continus en alternatifs.

373. Dans les solutions qui précèdent du problème de transformer un mouvement continu en alternatif, celles qui dérivent de l'emploi des organes qui permettent la transformation de mouvements continus en continus ne sont pas simples. Elles consistent en réalité en deux systèmes du premier genre qui agissent successivement l'un après l'autre. Ainsi la double crémaillère, fig. 311, se compose en réalité de deux systèmes composés d'une roue et d'une crémaillère qui agissent successivement dans des sens opposés.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les deux mouvements alternatifs étaient égaux entre eux, mais il n'en est pas nécessairement ainsi; ainsi dans le cas de deux crémaillères, leurs distances au centre de rotation peuvent différer d'une petite quantité, ce qui n'empêche pas l'action du pignon, et alors le châssis possède un petit mouvement de progression intermittent en même temps qu'un mouvement alternatif, inégal dans les deux sens et dont la différence égale le mouvement de progression.

Il n'y a pas lieu d'insister sur ce genre de mouvement, qui est d'une extrême simplicité; nous donnerons seulement une application curieuse qui procède de la disposition que nous venons d'indiquer, et qui est basée sur l'emploi de deux roues qui diffèrent non en diamètre, mais par leur nombre de dents.

Ce système repose sur l'emploi de la roue et de la vis sans fin.

D*d* est un axe fixe (fig. 315), B une roue tournant autour de cet axe, C une seconde roue de même diamètre tournant librement sur l'axe D*d*. A est une vis sans fin qui engrène avec les deux roues.

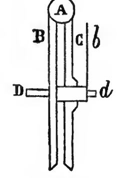


Fig. 315.

Si celles-ci ont le même nombre de dents, elles se meuvent

comme une seule pièce, mais si l'une a une ou deux dents de plus ou de moins que l'autre (ce qui réparti sur le jeu n'empêche pas l'action de la vis), les rotations des deux roues seront différentes, car comme les révolutions de la vis font traverser au plan des centres le même nombre de dents de chaque roue dans le même temps, il faut que quand l'une d'elles a fait une révolution complète, l'autre ait fait plus ou moins d'une révolution, en raison du nombre des dents manquantes ou excédantes.

B a N dents, C en a $N+m$, pour un tour de la première il passera N dents de chacune à travers le plan des centres, et la différence des deux rotations, la rotation relative de la roue C sera :

$$N+m-N=m.$$

Cette disposition est employée pour compter les révolutions d'un axe, en attachant une aiguille *b* à l'axe de B, et en traçant un cadran sur la face de C. Cette aiguille *b* marche très lentement, par rapport à C, et peut par suite enregistrer un grand nombre de tours de A. Si, par exemple, B a 100 dents, et C 101, l'aiguille fait le tour du cadran pour le passage de 100×101 dents des deux roues à travers le plan des centres, ou pour 10,100 tours de la vis.

MOUVEMENTS ALTERNATIFS

EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

374. Pour le genre d'organes dont nous allons traiter, la constance du rapport des vitesses est en général la condition dynamique essentielle, comme dans le cas des mouvements continus. En effet, le premier système devant être établi dans les meilleures conditions dynamiques, c'est-à-dire de telle sorte que la vitesse passe par zéro en variant d'une manière continue, lors des changements du sens du mouvement, le second système auquel le mouvement sera communiqué jouira de la même propriété si le rapport des vitesses est constant. La durée des oscillations est en outre la même dans deux systèmes de ce genre (sauf toutefois le cas d'intermittence dans l'action), puisque le premier mouvement produit nécessairement des mouvements inverses l'un de l'autre dans chaque demi-oscillation. Toutefois la condition dynamique ne se rapportant qu'au moment du changement de sens, et dépendant surtout de la loi du premier mouvement alternatif, l'égalité du rapport des vitesses n'a plus la même importance que pour les mouvements continus. Aussi n'étudierons-nous plus séparément les organes qui satisfont et ceux qui ne satisfont pas à cette condition.

Il est bien évident que si le rapport des vitesses, sans demeurer constant, satisfaisait pour le système conduit à la condition du maximum, le système serait encore très admissible en tant qu'organe de transformation. En effet, nous supposons ici que le premier mouvement est établi dans de bonnes conditions dynamiques, s'il en était autrement, un système dans lequel le rapport des vitesses ne serait pas constant, pourrait être préférable à un autre pour lequel cette condition serait satisfaite; mais cela à cause de l'imperfection du premier système.

Les pièces ne pouvant d'ailleurs se conduire que par contact immédiat ou par intermédiaires, c'est-à-dire par des systèmes analogues à ceux étudiés pour les mouvements continus, la plupart des solutions auxquelles nous allons arriver ne seront que celles déjà exposées lorsque les organes décrits peuvent agir dans deux sens opposés.

VIII.

MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF EN CIRCULAIRE ALTERNATIF.

375. Le mouvement circulaire alternatif étant produit par le levier, on voit que le problème à résoudre consiste à faire agir un levier sur un autre levier.

AXES PARALLÈLES.

Organes agissant par contact immédiat.

376. Remarquons d'abord qu'un levier unique, droit ou coudé (fig. 316 et 317), possédant un mouvement circulaire alternatif,

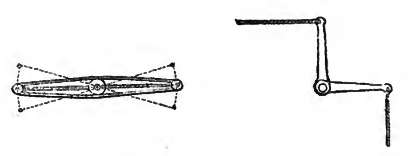


Fig. 316. Fig. 317.

en produit un à chaque extrémité, de même vitesse angulaire autour du centre de rotation, et par suite, ayant chacun des vitesses aux extrémités proportionnelles aux longueurs des bras du levier. Lors donc que les deux axes peuvent se réduire à un seul et que la vitesse angulaire peut être la même, un simple levier fournit la transformation demandée. C'est ainsi que la communication a lieu dans les balanciers de tout genre; c'est le moyen toujours employé lorsqu'on peut employer le même axe pour les deux mouvements.

377. Dans les autres cas on peut faire agir un levier sur un autre levier, par le contact de leurs extrémités. Comme le mouvement est en général petit quand on emploie ce système, les courbes qui devraient former le profil de ces extrémités peuvent être remplacées par les arcs de cercles approchés, des courbes enveloppe et enveloppée l'une de l'autre dans le cas d'un rapport constant, des arcs de spirale logarithmique ou d'ellipse tournant autour de leur foyer, ou enfin d'autres courbes dans le cas d'un rapport quelconque, la petite variation de vitesse angulaire qui résulte de cette substitution est petite et sans importance.

378. Cherchons à déterminer ces arcs de cercle pour un mouvement de faible étendue et un rapport de vitesse constant. A et B étant les centres des deux leviers (fig. 318), menons TK perpendiculaire à AB par le point T, point de contact des deux leviers dans leur position moyenne, les longueurs AT, BT étant déterminées en raison inverse des vitesses. Par ce même point T menons une ligne quelconque PTQ, si l'on prend sur la perpendiculaire un point quelconque K, et qu'on trace les lignes AK, BK les points P et Q, où ces lignes rencontrent la ligne PTQ pourront être pris pour le centre de deux cercles de rayons PT, QT dont les arcs *rs*, *mn*, seront convenables pour former les extrémités des leviers.

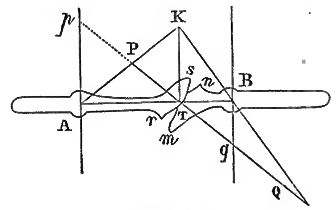


Fig. 318.

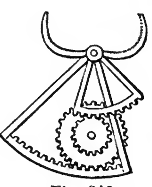
En effet, d'après ce que nous avons vu (art. 127) pour deux courbes qui se poussent, le mouvement sera le même que celui de deux leviers AP, BQ qui seraient joints par la bielle PQ. Pendant un déplacement infiniment petit, la bielle peut être considérée comme se mouvant autour du centre instantané de rotation. Or, dans la position de la figure ce centre se trouve en K, puisqu'il est à la fois sur AP et sur BQ, chaque extrémité de la bielle se mouvant perpendiculairement au rayon. K est le centre instantané de rotation, KT est perpendiculaire sur AB et T le point de contact; par cette construction, le point de contact se déplacera suivant la ligne des centres. Le mouvement aura lieu ainsi un instant par roulement des courbes l'une sur l'autre et sans frottement de glissement.

Comme la distance de K à T est arbitraire, si on la suppose infinie, dans quel cas AK, BK, deviennent parallèles à KT et perpendiculaires à la ligne des centres, c'est-à-dire A*p* et B*q*; *p* et *q* sont alors les centres et la construction devient très simple.

On doit dans la pratique faire l'angle PTA un peu grand pour éviter une trop grande obliquité de l'action.

379. L'inconvénient des systèmes précédents est de ne pas être à retour, d'exiger l'action d'un poids ou d'un ressort pour agir en sens inverse de la direction de la force supposée intermittente. Si l'action doit être transmise successivement dans les deux sens, il faut garnir de dents deux arcs de circonférences primitives décrites des deux centres des leviers. Le problème se trouve ainsi ramené aux solutions déjà trouvées pour la transformation du mouvement circulaire continu en mouvement de même nature; il est évident, en effet, que si le premier devient alternatif il en est de même du second, et que, comme nous l'avons dit, le système levier se confond avec le système tour lorsque celui-ci agit successivement dans deux sens opposés, avec cette différence que le mouvement circulaire peut alors comprendre plus d'un tour entier. Tout ce que nous avons exposé relativement aux rapports de vitesses constants ou variables, au frottement de roulement ou de glissement, etc., trouve à s'appliquer ici.

380. Nous n'avons pas à revenir ici sur une solution longuement étudiée dans les précédents chapitres.


Fig. 319.

Nous citerons, comme seul exemple, l'application simultanée de l'engrenage intérieur et extérieur fait (fig. 319) dans une machine à receper les pieux, pour fournir simultanément deux mouvements circulaires alternatifs de sens contraire. Si nous appelons R, R' les deux rayons des roues assemblées avec chacune des branches de la cisaille, r, r' ceux des roues montées sur l'axe moteur, on devra avoir pour la régularité de l'action $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$ d'ailleurs $R = R' + r' + r$.

Donc se donnant la distance des deux centres $R' + r'$ et le rapport $\frac{R}{r}$ il sera facile de déterminer toutes les dimensions de cet appareil.

Organes agissant par intermédiaires.

381. 1° *Flexibles.* — *Cordes.* Une corde attachée aux extré-

mités de deux leviers ou enroulée en partie sur des cylindres et attachée à ceux-ci, fournira la transformation demandée, mais seulement dans un sens, quand l'action agit suivant la longueur de la corde. Il faut nécessairement l'intervention de la pesanteur ou d'un ressort pour que l'action ne s'arrête pas dans le sens opposé. Telle est la disposition de la fig. 320 employée dans le tour en l'air qui sert pour le travail des bois, et dans lequel un des leviers est formé d'une lame élastique. Le rapport de vitesse est constant avec un cylindre circulaire, il serait variable suivant une loi voulue si ce cylindre était entaillé en spirale.

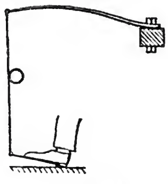


Fig. 320.

382. 2° *Rigides.* — *Articulations.* La bielle s'applique fort bien à cette transformation :

1° Si les positions moyennes des deux leviers sont à peu près parallèles, une bielle adaptée aux deux extrémités transmettra de l'un à l'autre le mouvement alternatif dans les deux sens.

2° Si les positions moyennes ne sont pas parallèles on remplace le levier droit d'un des systèmes par un levier coudé dont la seconde branche soit parallèle au second levier, et on assemble par une bielle son extrémité avec celle du premier (fig. 321). Les leviers peuvent être dans un rapport de grandeur quelconque en théorie, mais pas trop différent dans la pratique pour éviter les actions obliques. Nous avons donné (art. 180) tout ce qui est nécessaire pour l'étude des vitesses dans ce système.

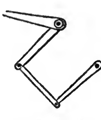


Fig. 321.

2° AXES NON PARALLÈLES.

Organes agissant par contact immédiat.

383. Lorsque les axes de rotation ne sont pas parallèles, les solutions précédentes doivent être modifiées suivant des règles déjà exposées. Ainsi les extrémités de deux leviers dont les axes ne sont pas parallèles devront être déterminées par les considérations exposées en traitant d'excentriques conduisant un levier. Quant

aux solutions dérivant des engrenages, permettant une action dans les deux sens entre deux axes non parallèles, tout doit être déterminé comme s'il s'agissait de mouvements circulaires continus; la solution ne diffère pas de celle exposée pour la transformation du circulaire continu en circulaire continu.

Organes agissant par intermédiaires.

384. Nous ne traiterons ici que des articulations; la bielle peut néanmoins être remplacée par une corde, mais alors le mouvement ne peut avoir lieu que dans un sens, quand la traction s'exerce dans le sens de sa longueur, et pour cette partie de son action elle agit absolument comme une bielle.

Cherchons d'abord à déterminer la position que doit occuper la bielle, lorsqu'on veut satisfaire à la condition que le rapport de vitesse soit constant.

Les axes A*e*, B*f* n'étant pas parallèles (fig. 322), cherchez leur perpendiculaire commune *ef* et menez *eg* parallèle à *f*B. Dans le plan A*eg* menez *eh* qui divise A*eg* en deux angles A*eh*, *heg* tels que leurs sinus soient réciproquement comme les vitesses angulaires

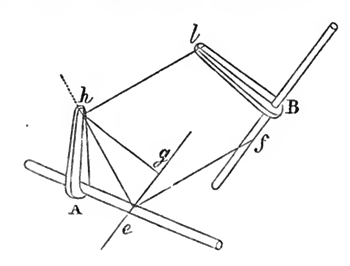


Fig. 322.

respectives des axes A*e*, B*f*. D'un point quelconque *h*, menez des perpendiculaires *h*A, *hg* à A*e* et *eg*, prenez *f*B = *eg*, menez B*l* égale et parallèle à *gh*, enfin joignez *h* et *l*, cette droite parallèle à *ef* est perpendiculaire à la fois à A*h* et à B*l*.

Si A*h* et B*l* sont les bras de levier et *hl* la bielle par laquelle ils se transmettent le mouvement, cette bielle étant perpendiculaire

aux bras dans leur position moyenne, si l'amplitude du mouvement est petite, le rapport des vitesses angulaires des axes sera pour cette faible amplitude à peu près constant et égal au rapport inverse des longueurs des bras.

385. *Mouvement de sonnette.* Lorsque la position relative des deux bras de levier est donnée, ou lorsque l'amplitude de leur mouvement doit être notable, il faut renoncer à chercher à obtenir un rapport de vitesse constant.

On peut alors employer le système représenté fig. 323, dit mouvement de sonnette. Étant données les positions des deux leviers, le levier moteur et celui qui doit être mis en mouvement, et aussi la position des deux axes : adaptez à chacun d'eux et perpendiculairement à leur direction une branche de levier coudé dont les longueurs soient en raison inverse des vitesses. Si l'on place ces leviers dans un plan tel qu'en menant par un point d'un des axes un plan perpendiculaire à chacun de ceux-ci, dans la position moyenne du mouvement il divise en deux parties égales l'angle que font ces deux derniers ; enfin si l'on réunit par une bielle ces deux leviers accessoires, on aura l'organe cherché.

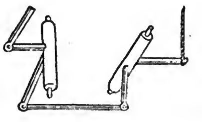


Fig. 323.

La traction, ayant lieu obliquement d'un levier à l'autre, engendre une torsion et des frottements qui rendent cet appareil impropre à transmettre de grands efforts.

Chaque articulation de la bielle qui établit la communication entre les deux leviers doit non seulement permettre un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à chaque axe de rotation, mais encore permettre à la bielle de s'incliner sur le plan perpendiculaire à ce dernier. Si donc le jeu laissé dans les articulations ne suffit pas à cet effet en le laissant assez grand, comme on le fait souvent dans la pratique, il faut que l'articulation soit remplacée par un joint dont l'axe est parallèle à celui du levier et qui porte une tige ronde, autour de laquelle passe l'extrémité de la bielle formant anneau ; plus exactement un double joint devrait exister à chaque extrémité, mais le système précédent suffit pour tous les cas de la pratique.

IX.

CIRCULAIRE ALTERNATIF EN RECTILIGNE ALTERNATIF.

Le mouvement circulaire alternatif étant produit par le système levier et le mouvement rectiligne par le système plan, le problème à résoudre consiste à mettre en rapport deux systèmes de ce genre.

DIRECTION DU MOUVEMENT RECTILIGNE DANS LE PLAN DU MOUVEMENT CIRCULAIRE.

(Cas correspondant à celui des axes parallèles pour deux mouvements circulaires.)

Organes agissant par contact immédiat.

386. Si la barre qui est assujettie à glisser en ligne droite porte une cheville, et que cette cheville passe dans une rainure pratiquée dans le levier oscillant (fig. 324), on aura une solution du problème proposé.

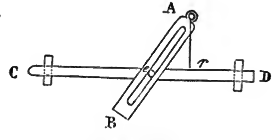


Fig. 324.

Si cette rainure est rectiligne et que sa direction passe par l'axe de rotation, on aura pour le rapport des vitesses des deux mouvements, pour un angle θ mesuré à partir de la perpendiculaire dont la longueur est r, abaissée du centre sur la direction du mouvement rectiligne, $\frac{l\theta}{r \text{ tang. } \theta}$, l étant la longueur du levier.

Si la rainure appartenait à la tige douée d'un mouvement rectiligne et la cheville au levier, nous retombons dans la disposition de l'art. 323, et si la rainure est perpendiculaire sur la

barre (fig. 325), le rapport des vitesses est le même que celui du système formé d'une bielle et d'une manivelle, celle-ci décrivant le même arc que le levier.

En variant les formes des rainures et leurs directions, on peut obtenir tous les rapports de vitesse que l'on voudra, mais il est clair que ces dispositions qui donnent naissance à un grand frottement le long des rainures et aussi sur les guides de la barre, pour peu que l'inclinaison du levier s'éloigne de la perpendiculaire, sont défectueuses, et par suite peu usitées dans la pratique.

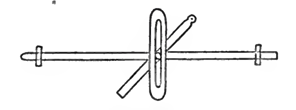


Fig. 325.

387. Les systèmes qui servent à produire le mouvement rectiligne continu à l'aide du circulaire continu fournissent des solutions du problème qui nous occupe, les deux mouvements devenant simultanément alternatifs, et le système tour ainsi mû se confondant alors avec le système levier, comme nous l'avons déjà observé plusieurs fois.

Les diverses crémaillères fourniront donc la solution du problème, sans leur faire subir aucune modification et sans qu'il y ait rien à ajouter aux détails que nous avons donné. Nous savons que le rapport des vitesses des deux systèmes sera constant, et que par suite si le premier satisfait aux conditions d'économie de travail, le second y satisfera aussi.

Organes agissant par intermédiaires.

388. 1° *Flexibles.* — *Cordes.* Les cordes, par l'effet de leur flexibilité, peuvent en s'enroulant ou se déroulant sur un cylindre transformer avec grande simplicité le mouvement rectiligne en un mouvement circulaire dont l'axe est celui du tambour. La corde ne pouvant servir que dans le sens de la traction, ces organes

ne peuvent agir dans les deux sens et l'intervention de la pesanteur ou d'un ressort est nécessaire pour établir le mouvement alternatif. Telle est la disposition de la fig. 326, tel était encore le

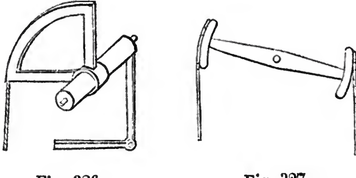


Fig. 326. Fig. 327.

système jadis employé dans les machines à vapeur à simple effet (fig. 327), dans lesquelles le balancier mis en mouvement par le piston, entraînait un contre-poids suspendu à l'extrémité d'une chaîne et que la pesanteur ramenait ensuite à sa position initiale. C'est ce système que Watt a remplacé, pour la machine à double effet, par le parallélogramme, qui permet d'obtenir la transformation dont nous parlons ici sans intervention d'une force étrangère, mais à l'aide d'un système complexe dont nous parlons aux *Combinaisons de vitesses*.

On voit, par l'exemple ci-dessus, que les cordes servent à produire le mouvement circulaire alternatif, à l'aide d'un mouvement rectiligne alternatif, par la disposition inverse de celle du treuil, c'est-à-dire en exerçant une traction sur la corde préalablement enroulée. Cette disposition est employée fréquemment dans les arts; nous prendrons pour exemple les deux outils à percer suivants.

389. La fig. 328 représente l'outil connu sous le nom de *drille* ou *trépan*. Une corde, qui traverse une tige verticale, est fixée aux deux extrémités d'une traverse perpendiculaire à cette tige et mobile longitudinalement. On fait tourner l'instrument jusqu'à ce que la corde soit enroulée autant que possible autour de la tige, ce qui force la traverse à s'élever. Alors, si l'on appuie la pointe sur l'emplacement d'un trou à forer, en faisant dérouler l'instrument par une pression dans le sens de l'axe, la tige prendra un mouvement circulaire autour de son axe, qui se prolongera de manière à enrouler de nouveau la corde de telle sorte que ce mou-

vement sera alternatif, tandis que la traverse, montant et descendant alternativement, aura un mouvement rectiligne alternatif.

L'*archet* (fig. 329) est aussi un outil fort connu, qui, au moyen

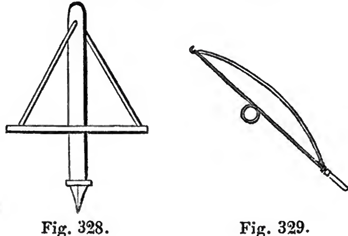


Fig. 328. Fig. 329.

d'un mouvement rectiligne alternatif, imprime un mouvement circulaire au cylindre autour duquel la corde fait un tour.

390. En disposant convenablement les cordes, on peut transformer le mouvement circulaire limité en rectiligne limité sans intervention de la pesanteur ou de ressort, comme dans la fig. 329, c'est-à-dire en enroulant sur le cylindre du treuil deux cordes en sens inverse l'une de l'autre.

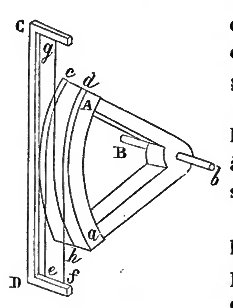


Fig. 330.

Telle est la disposition représentée dans la fig. 330 dans laquelle la roue AB conduit une tige DC glissant entre deux guides.

On fixe en *g* sur la barre et en *h* sur la roue les extrémités d'une lanière *gh*, à l'aide de laquelle la roue en s'abaissant fera descendre la barre.

Si l'on place en outre deux autres lanières *ce*, *df* en sens contraire de la première, de manière à ménager entre elles un intervalle pour le jeu de celle-ci, on fera marcher la barre de bas en haut en faisant tourner la roue dans le même sens. Ces lanières, pour de grands efforts, devraient être remplacées par des chaînes.

Nous n'avons pas à parler des vitesses pour tous ces cas qui ne

sont que des applications du système treuil. Le rapport sera variable si l'axe du treuil n'est pas muni d'un cylindre à génératrices qui lui soient parallèles.

391. 2° *Rigides.* — *Articulations.* Le système de bielle et manivelle qui fournit la solution de la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif agit également bien lorsque le mouvement circulaire devient alternatif. Cette disposition est fort employée dans la pratique ; c'est ainsi, par exemple, que dans beaucoup de pompes on réunit un levier à la tige de la pompe guidée en ligne droite par une pièce intermédiaire qui est une véritable bielle.

L'obliquité de l'action tend à déverser la barre mue en ligne droite, effet que l'on évite quelquefois en faisant agir ensemble deux systèmes semblables comme fig. 331. Les actions obliques de

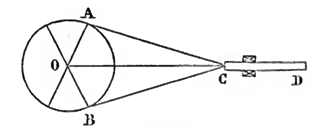


Fig. 331.

ces deux systèmes se détruisent l'une l'autre, et la résultante des forces agissant suivant les deux bielles passe toujours par l'axe du mouvement rectiligne.

Quant aux rapports des vitesses, il n'y a évidemment rien de changé, et tout ce que nous avons dit art. 294 s'applique ici sans modification d'aucune sorte.

DIRECTIONS DES DEUX MOUVEMENTS DISPOSÉS L'UN RELATIVEMENT A L'AUTRE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

392. Nous avons vu que les divers systèmes que nous venons de passer en revue n'étaient à proprement parler que des applications de systèmes déjà étudiés. Tout ce que nous avons dit pour ceux-ci, pour les diverses dispositions relatives des directions du

mouvement, s'étend au cas actuel; par exemple, ce que nous avons dit des excentriques et rainures s'applique aux premières solutions que nous avons données.

De même, les crémaillères obliques pourront servir lorsque la direction du mouvement rectiligne sera peu inclinée sur l'axe du mouvement circulaire.

Si la direction du mouvement rectiligne est parallèle à l'axe, la vis fournira une solution, fréquemment employée dans la pratique.

A l'aide de poulies directrices, les cordes fourniront des transformations pour des positions quelconques des directions du mouvement.

393. Nous terminerons par une curieuse application du système de rainures héliçoïdales qu'a fait Whitworth, célèbre constructeur de machines-outils en Angleterre.

Le problème à résoudre consistait à trouver le moyen de faire faire à l'outil de la machine à raboter un demi-tour exact, pour qu'après avoir opéré en allant dans un sens, il opérât encore en revenant en sens contraire.

L'outil est monté dans un cylindre A (fig. 332) et y est maintenu à l'aide de vis. A la partie supérieure de ce cylindre est pratiquée une rainure héliçoïdale qui s'étend exactement d'un côté à l'autre d'un plan diamétral. Le cylindre B, dans l'intérieur duquel est ajusté à frottement doux le cylindre A porte une rainure verticale *e*, et une pièce C ayant un mouvement rectiligne alternatif porte une dent rectangulaire qui traverse la rainure verticale et entre dans la rainure héliçoïdale. Le mouvement rectiligne de cette pièce fera pour chaque oscillation tourner le cylindre porte-outil, et exactement d'un demi-tour, par suite de la longueur de la rainure héliçoïdale.

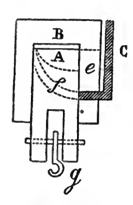


Fig. 332.

X.

RECTILIGNE ALTERNATIF EN RECTILIGNE ALTERNATIF.

394. Le mouvement rectiligne alternatif étant de sa nature identiquement le même que le mouvement rectiligne continu, c'est-à-dire existant par les mêmes guides et ne se composant que de deux semblables mouvements qui se succèdent en sens inverse, la transformation actuelle n'est autre que celle exposée chapitre V. La seule chose à observer, c'est que le mouvement doit dans ce cas pouvoir être transmis dans deux sens opposés.

Examinons à ce point de vue les solutions trouvées.

Organes agissant par contact immédiat.

Les plans inclinés n'agissant que dans un sens ne peuvent fournir la transformation cherchée que par l'intervention de poids ou de ressorts; si, au contraire, on emploie les doubles plans inclinés ou des rainures semblables à celles de la fig. 314, le mouvement pourra être transmis avec ses alternatives.

Organes agissant par intermédiaires.

395. *Flexibles.* — *Cordes.* Les cordes n'agissant que par traction, ne pourront transmettre le mouvement alternatif qu'avec l'aide de contre-poids ou de ressorts. Lorsqu'il en est ainsi, le mouvement peut être transmis en tous sens et dans tout rapport de vitesse à l'aide de poulies.

396. *Rigides.* — *Articulations.* Les articulations qui ne peuvent transmettre le mouvement entre deux mouvements rectilignes continus indéfinis par leur nature, s'appliquent au contraire très bien à des mouvements alternatifs.

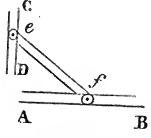


Fig. 333.

Si l'on suppose que les extrémités d'une barre ef (fig. 333) sont articulées à deux barres qui se meuvent en ligne droite ou bien sont engagées

dans des rainures AB, CD, il est évident qu'en faisant avancer l'extrémité *e*, *f* avancera aussi et réciproquement.

Dans de semblables systèmes, les résistances et frottements sur les guides seraient énormes; mais on peut les réduire à celles des articulations ordinaires lorsque les deux mouvements sont à angle droit, en réunissant deux systèmes semblables à celui de la fig. 331.

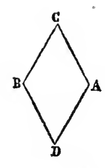


Fig. 334.

397. Soit le losange ABCD (fig. 334), si l'on donne à deux sommets A, B, un mouvement rectiligne alternatif, les deux sommets C, D auront le même genre de mouvement dans une direction perpendiculaire à la première.

On peut tracer le losange de telle sorte que les mouvements des sommets verticaux soient dans un rapport quelconque avec ceux des sommets horizontaux. Ainsi, soient les points C et D pouvant se mouvoir sans obstacles vers le centre du losange, α étant la moitié de l'angle au sommet C, ce sommet pour parvenir au centre du losange parcourra le chemin l cos. α, l étant la longueur du côté du losange, et lorsqu'il arrivera en ce point, le sommet A sera à une distance du centre égale à l, et aura parcouru le chemin $l - l$ sin. α. Le rapport des deux mouvements sera donc $\frac{l - l \sin. \alpha}{l \cos. \alpha} = \frac{1 - \sin. \alpha}{\cos. \alpha}$.
L'angle α, c'est-à-dire l'inclinaison du côté du losange sur les diagonales, sera ainsi déterminé par le rapport des longueurs des deux mouvements.

Si l'on s'arrête en des points B′ et A′, les diagonales restant à parcourir pour que C arrive au centre et A à l'extrémité du rayon, seront l cos. α' et $l - l$ sin. α', donc le rapport de vitesses du point C à celle des points A et B passant en A′ et B′ sera $\frac{\sin. \alpha' - \sin. \alpha}{\cos. \alpha - \cos. \alpha'}$.

Si le point C était fixe, A et B pouvaient se rapprocher ou s'éloigner l'un de l'autre (en restant alors sur la circonférence du cercle dont le centre est en C et l le rayon), à cause de la symétrie le point D se mouvra toujours sur la diagonale CD, qui partage en

deux parties égales l'angle au sommet, et sa vitesse sera double de ce qu'elle était lorsque les deux points C et D étaient mobiles tous deux. Nous reviendrons plus loin sur ce genre de combinaisons.

Dans ce système articulé, dit *losange*, le chemin parcouru par les frottements est minime; il est donc avantageux sous le rapport des résistances passives.

398. Nous ne traitons pas spécialement des transformations entre deux directions quelconques du mouvement, car nous n'aurions qu'à répéter ce que nous avions dit pour les mouvements continus.

Les solutions directes que nous avons indiquées sont peu usitées. Généralement dans la pratique le mouvement rectiligne alternatif est transformé en circulaire continu, à l'aide de la bielle et de la manivelle, pour être ensuite transformé de nouveau en rectiligne alternatif; c'est en opérant sur le mouvement circulaire qu'on obtient toutes les variations de vitesses dont on a besoin. Dans ce cas, comme dans beaucoup d'autres, les solutions les plus directes sont loin d'être les plus avantageuses.

COMBINAISONS DE MOUVEMENTS.

399. Pour achever l'étude des transformations de mouvement, il nous reste à étudier celles des mouvements quelconques en mouvements suivant des courbes et réciproquement. Ce genre de mouvement ne peut être engendré par un seul mouvement qu'autant que la pièce mouvante est engagée dans un guide courbe, dans une rainure de forme convenable. Or un point peut arriver à l'extrémité d'un élément d'une courbe soit en suivant celle-ci, soit y parvenir par deux mouvements élémentaires suivant ses deux coordonnées, sans l'intervention de guide courbe; on voit donc comment la combinaison de deux mouvements peut être le moyen le plus simple et le plus avantageux dans la pratique de produire le mouvement suivant une courbe.

Comme cette étude rentre dans celle des mouvements combinés, avant de traiter cette question, nous passerons en revue quelques systèmes composés de la répétition des divers organes que nous venons d'étudier.

Dans ce cas comme dans celui de la juxta-position d'organes différents, qui constituent tous les systèmes compliqués appellés Machines ou Mécanismes, il suffit de déterminer les rapports de vitesse des divers organes qui se communiquent le mouvement de proche en proche, pour avoir toutes celles des diverses pièces du système. Nous voulons seulement donner quelques détails sur certains cas qui sont d'un grand intérêt dans la pratique, ou qui peuvent donner lieu à quelques considérations particulières.

RÉPÉTITION DE MOUVEMENTS SEMBLABLES.

1° MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU (Ordre tour). *Systèmes de roues dentées.*

400. Le rapport des vitesses angulaires des roues extrêmes d'un système composé de roues engrenant ensemble est le même que si les roues extrêmes étaient immédiatement en contact, puisque les mêmes longueurs des diverses circonférences primitives passent toujours aux divers points de contact.

La multiplication des roues dentées ne fournit donc pas le moyen d'accroître le rapport des vitesses angulaires de deux axes. Lorsqu'il doit être considérable, on emploie souvent plusieurs engrenages situés dans des plans parallèles au lieu d'un seul engrenage.

Une première roue A (fig. 335) engrène, par exemple, avec une autre roue a d'un rayon bien moindre, avec un *pignon;* sur le même axe que le pignon a est montée une roue B solidaire avec lui. La roue B engrène avec un second pignon b sur l'axe duquel est montée une roue C.

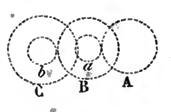


Fig. 335.

w, w', w'', étant les vitesses angulaires autour des axes des trois roues A, B, C, soient R, R′, R″, les rayons des roues; r, r', ceux des pignons a, b, on aura :

$$w \times R = w' \times r$$
$$w'' \times r' = w' \times R'$$

et en divisant ces deux expressions l'une par l'autre :

$$\frac{w}{w''} = \frac{r \times r'}{R \times R'}$$

c'est-à-dire que la vitesse angulaire de la première roue est à celle de la dernière comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues, celle montée sur le dernier pignon exceptée.

Et en général $N_0\, N_1 \ldots.$ étant les nombres des dents des roues, $n_1\, n_2\, n_3 \ldots$ le nombre des dents des pignons montés sur les mêmes axes (les nombres des dents étant entre eux comme les rayons), T_1 le nombre de tours de la première roue, T_m le nombre de tours de la celle mue par le dernier pignon, on aura :

$$\frac{T_m}{T_1} = \frac{N_0\ N_1\ \ldots\ldots\ N_{m-1}}{n_1\ n_2\ \ldots\ldots\ n_m}.$$

Telle est la formule dont on se sert dans les cas où l'on doit obtenir une grande vitesse à l'aide d'une petite vitesse de l'arbre moteur, et notamment dans l'horlogerie où ce problème doit toujours être résolu (1).

(1) Nous donnerons ici un curieux théorème, dû au D[r] Young.

Si dans un système de roues dentées il y a $k + 1$ axes dont toutes les roues

401. Disons quelques mots de cette application importante, et prenons pour exemple une horloge astronomique.

Au moyen de trois ou quatre roues engrenant, pignons montés sur l'axe d'une roue avec la circonférence de la suivante, on produit à l'aide du mouvement de rotation très lent de la roue du cylindre que fait tourner le poids moteur, le mouvement assez rapide de la roue d'échappement. Le problème paraît susceptible d'un nombre indéfini de solutions ; mais il est limité par les conditions spéciales de la question. En effet, il faut que la roue d'échappement faisant exactement un tour complet pour 60 oscillations du régulateur (supposé un pendule battant la seconde), l'axe de cette roue porte l'aiguille des secondes qui parcourera 360° en une minute ; il est nécessaire qu'une autre roue du rouage aille 60 fois moins vite et parcoure 360°, fasse un tour en une heure, ce sera l'aiguille des minutes. Il faut enfin qu'un autre axe aille 12 fois moins vite, ce sera l'axe de l'aiguille des heures.

Nous renverrons aux traités d'horlogerie pour la discussion du système de roues et de dents les plus convenables à employer pour ce problème spécial.

402. Considérons seulement d'une manière générale ce problème d'une grande importance en mécanique :

Étant donné, le rapport de vitesse de deux axes déterminer

portent chacune w dents, tous les pignons montés sur ces axes p ailes, on a la relation entre les vitesses

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{w}{p}\right)^k = x^k \text{ en posant } \frac{w}{p} = x,$$

$xp = w$ est le nombre des dents d'une roue et $k\,(p + xp)$ le nombre total des dents du système.

Or $\left(\frac{w}{p}\right)^k = x^k = \text{C}$ constante, donc $k = \frac{\log. \text{C}}{\log. x}$; si donc on se propose d'obtenir le moindre nombre de dents possible, il faudra rendre un minimum

$$k\,(p + xp) = \frac{\log. \text{C}\,(p + xp)}{\log. x}.$$

Différentiant, il vient pour le minimum $\log. x = \frac{1 + x}{x}$, d'où $x = 3{,}59$.

Donc étant donné un rapport de vitesse angulaire de deux axes, pour l'obtenir avec le moindre nombre de dents, il faudra faire $\frac{w}{p} = 3{,}59$.

le nombre des axes intermédiaires, les proportions des roues et les nombres de dents convenables, pour transmettre le mouvement d'un axe à l'autre.

Pour simplifier, nous supposons qu'il s'agit seulement de roues dentées; mais tout train complexe composé de roues, poulies, crémaillères, etc., peut être calculé d'après les mêmes principes.

La solution consiste évidemment pour avoir le nombre des dents des roues et le nombre des axes, à décomposer $\frac{T_m}{T_1}$ en nombres premiers, à établir une formule semblable à celle de l'art. 400, en prenant le produit de plusieurs nombres pour une roue s'il est nécessaire, afin de rester dans les limites des nombres convenables pour les dents des roues et des pignons.

403. On ne peut procéder que par approximation dans le cas où les deux nombres ou quelques-uns de leurs facteurs sont trop considérables pour deux roues et ne sont pas décomposables en facteurs premiers, sont premiers.

Soit $\frac{T_m}{T_1} = \alpha \pm E$. Si on ne tient pas compte de E, on peut avec α nombre simple en général, multiplié s'il est nécessaire par une fraction égale à l'unité, obtenir une solution, mais l'on introduit une erreur de E révolutions du dernier axe pour une du premier, et la nature de la machine indique si cette approximation est suffisante.

Pour obtenir une plus grande approximation ou si α est un nombre premier trop grand, on détermine, comme ci-dessus, le plus petit nombre m d'axes nécessaire et le nombre d'ailes que, d'après la nature de la machine, il convient de donner aux pignons. Soit D le produit des nombres des dents des roues, F le produit des nombres des dents des pignons, on aura dans ce cas $\frac{T_m}{T_1} = \frac{D}{F} = \frac{F\alpha}{F}$ (nous supposons que les roues conduisent).

Au lieu de prendre $\frac{D}{F} = \alpha$, posons $\frac{D}{F} = \frac{F\alpha \pm E}{F}$, E étant choisi aussi peu différent du reste exact que possible, s'il y en a un, et tel que $F\alpha \pm E$ soit décomposable en facteurs. L'erreur

est alors au plus de $\pm$ E tours du dernier axe pour F tours du premier ou $\frac{\pm E}{F}$ rotations du dernier axe pour une du premier.

Si les pignons conduisent, on prend de la même manière $\frac{T_1}{T_m} = \frac{D\alpha \pm E}{D}$, et l'erreur est de $\frac{\pm E}{D}$ rotations du premier axe pour une du dernier.

404. *Exemple.* — Soit demandé d'obtenir approximativement

$$\frac{T_m}{T_1} = 269.$$

Si on prend le nombre entier le plus près, 270, l'erreur est d'un tour du dernier axe pour 270 du premier. Si d'après la nature de la machine le rapport $\frac{1}{8}$ est plus grand que celui qui est permis entre les roues et les pignons, comme 269 est compris entre 8^2 et 8^3, trois paires de roues et de pignons sont nécessaires.

Si on emploie des pignons de 10 dents, on a : $\frac{D}{F} = \frac{269000}{1000}$ et $\frac{269001}{1000} = \frac{3^3 \times 41}{10^3}$, qui constitue un train excellent dont l'erreur est de $\frac{1}{1000}$ de révolution du dernier axe pour un tour du premier.

405. Cette méthode est suffisante pour les cas ordinaires; mais si, une grande exactitude étant nécessaire, les termes de la fraction bien que divisibles en facteurs exigent grand nombre de roues et de pignons, il faut nécessairement déterminer une nouvelle fraction d'une valeur approchée de celle de la première et de termes plus simples; les fractions continues s'appliquent à ce cas avec avantage.

$\frac{T_m}{T_1}$ étant la forme de la fraction dont les termes sont d'un grand nombre de chiffres; en la réduisant en fraction continue à la manière ordinaire, on obtient des séries de réduites, les premières très simples, les suivantes plus approchées, qui, examinées séparément admettront le plus souvent une division convenable en facteurs, ou au moins différeront peu de fractions donnant une

approximation suffisante. La valeur de l'approximation entre la fraction proposée et la réduite adoptée est toujours déterminée par la différence de ces deux quantités.

Soit en général $\frac{x}{y}$ une fraction très approchée d'une fraction donnée $\frac{a}{b}$, on a la différence

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by} = \frac{k}{by}.$$

D'après la supposition k est très petit par rapport à by, et peut être positif ou négatif; pour déterminer k, on a l'équation indéterminée $ay - bx = k$ [1], dont toutes les solutions sont $x = \alpha + ma$, $y = \beta + mb$, m étant un nombre entier quelconqne positif ou négatif, $x = \alpha$, $y = \beta$ étant des valeurs convenables pour une solution.

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ convertie en fractions continues et $\frac{p}{q}$ l'avant-dernière réduite, les formules ci-dessus pour toutes les valeurs possibles de x et y deviennent $x = pk + ma$, $y = qk + mb$ et $\frac{x}{y} = \frac{pk + ma}{qk + mb}$ est l'expression de la fraction approchée cherchée, dans laquelle m et k peuvent être tout nombre entier positif ou négatif, k étant petit par rapport à by et ax.

En effet, $x = pk$, $y = qk$ fournissent une solution, puisqu'en mettant ces valeur dans l'équation [1] pour x et y, il vient $(aq - bp)\,k = k$, puisque la différence $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - pb}{bq} = \frac{1}{bq}$, d'après la théorie des fractions continues.

Un grand nombre de valeurs de $\frac{x}{y}$ peuvent être obtenues à l'aide de l'expression ci-dessus et par suite on peut choisir celles décomposables en facteurs. Toute la difficulté de ce procédé consiste dans le choix des valeurs convenables de k et de m. Les nombres ainsi obtenus pour x et y sont nécessairement petits, k et m étant petits et pouvant avoir des signes différents, ce qui donne une très grande latitude pour le choix.

Ainsi si l'on donne à k les valeurs $0, -1, +1, -2$, et ainsi de suite, et que dans chaque cas on prenne de semblables valeurs de m qui donnent de petites valeurs de x et y ; on décomposera chaque paire de résultats en facteurs premiers, et, ceci fait, on calculera l'erreur résultante. En procédant ainsi on obtiendra des nombres pouvant permettre une exactitude suffisante sans employer grand nombre de roues. Des tables de facteurs premiers facilitent beaucoup les calculs.

406. Soit à déterminer la fraction $\frac{x}{y}$ très voisine de $\frac{45}{14}$, l'avant-dernière réduite est $\frac{16}{5}$; plaçant ces nombres dans l'expression de $\frac{x}{y}$, on a :

$$\frac{16\,k + m\,45}{5\,k + m\,14}.$$

$$\text{Soit}\quad m = 1, k = -1,\ \frac{x}{y} = \frac{29}{9},$$
$$m = 1, k = -2,\ \frac{x}{y} = \frac{13}{4},$$
$$m = 2, k = -3,\ \frac{x}{y} = \frac{42}{13}.$$

Deux de ces termes seraient obtenus par le seul calcul des réduites, mais non le troisième $\frac{42}{13}$.

407. Si l'on applique cette méthode à l'exemple d'un mouvement annuel dans une horloge, dans ce cas la fraction $\frac{a}{b}$ est égale à $\frac{164359}{450}$, l'expression des fractions approchées devient :

$$\frac{164359 \times k - m \times 58804}{450 \times k - m \times 161},$$

dans lesquels k et m peuvent prendre toutes les valeurs, par exemple :

$$\frac{7 \times 164359 - 22 \times 58804}{7 \times 450 - 22 \times 161} = \frac{143175}{392} = \frac{25 \times 69 \times 83}{8 \times 7 \times 7}.$$

Correspondant à une période de $365^{j}\ 5^{h}\ 48'\ 58''\ 6944$ (erreur de $10''\ 69$ avec l'année vraie).

C'est le résultat calculé par une méthode différente par le Père Alexandre, et depuis par Camus et Fergusson.

L'expression :

$$\frac{3 \times 164359 - 10 \times 58804}{3 \times 450 - 10 \times 161} = \frac{94963}{260} = \frac{11 \times 89 \times 97}{2^2 \times 5 \times 13},$$

qui correspond à une période de $365^j\ 5^h\ 48'\ 55''\ 38$, est aussi très convenable.

408. Dans un système de roues dentées, une ou plusieurs vis sans fin peuvent être introduites pour diminuer le nombre des dents; par exemple, dans la dernière fraction citée, le dénominateur ne peut être divisé en moins de 3 roues; mais on peut les remplacer par deux pignons et une vis sans fin (en se rappelant que cette dernière équivaut à un pignon à une aile); on aura ainsi les systèmes équivalents $1 \times 20 \times 13$ ou $1 \times 10 \times 26$. Si la vis sans fin n'est pas convenable, les termes de la fraction doivent être multipliés par 4, ce qui rend le dénominateur suffisant pour trois pignons, et le train devient : $\frac{44 \times 89 \times 97}{8 \times 10 \times 15}$.

2° MOUVEMENT RECTILIGNE CONTINU (Ordre plan).

409. Nous avons vu que les cordes offraient le principal moyen de communiquer le mouvement rectiligne continu dans des directions et dans des rapports de vitesse quelconques, à l'aide de poulies qui permettent de diriger leur mouvement. Nous avons déjà étudié les systèmes qui résultent de la répétition des poulies et qui constituent les moufles. Nous allons maintenant étudier l'emploi simultané de plusieurs systèmes semblables, de plusieurs moufles combinées ensemble, le mouvement rectiligne se communiquant par une même corde.

Fig. 336.

410. *Combinaison de moufles.* Soit A la poulie fixe d'une moufle qui a n_1 brins, et dont la corde se dirige suivant AB (fig. 336).

Plaçons à l'extrémité de cette corde une poulie mobile B et une

moufle dont b est la poulie fixe, portant n_2 brins. Ayons de même une troisième moufle dont C soit la poulie mobile et c la poulie fixe, ayant n_3 brins.

Soient V_4 la vitesse de la corde sortant suivant CD, et V_1 V_2 V_3 les vitesses respectives de a, B, C, on a :

$$V_4 = n_3 V_3 = n_3 n_2 V_2 = n_3 n_2 n_1 V_1.$$

S'il y a m moufles dans le système et que tous aient le même nombre de brins, on aura :

$$V_{m+1} = n^m V_1.$$

Le nombre total des brins sera $n \times m$; d'où le problème suivant analogue à celui traité dans la note de la page 353.

411. Étant donné le rapport des vitesses $\frac{V_{m+1}}{V_1} = n^m$ d'un système de moufles, trouver le nombre et la nature des moufles qui exigent le moindre nombre de brins pour un même rapport de vitesse, problème intéressant, puisqu'il donnera le système dans lequel la résistance due à la raideur des cordes sera la moindre, résistance considérable dans les moufles.

Puisque n^m = constante = C, on a :

$$m = \frac{\log. C}{\log. n} \text{ et le nombre } n \times m = \frac{n \log. C}{\log. n},$$

dont le minimum est obtenu pour log. hyp. $n = 1$ ou $n = 2{,}72$, dont le nombre entier le plus approché est 3 ; ce qui donne la série de moufles qui peuvent transmettre une vitesse dans un rapport donné avec le moindre nombre de brins par la combinaison de moufles simples et égales. Les marins emploient quelquefois les moufles de cette manière.

Si au lieu d'attacher chaque moufle au brin sortant de la poulie fixe de la moufle précédente, on l'attachait au brin sortant de la poulie mobile, un brin pourrait encore être épargné dans chaque moufle et le nombre total des brins serait $(n - 1)\, m$, dont le minimum serait toujours pour $n - 1 = 2{,}72$ d'où $n = 3{,}72$.

3° MOUVEMENT CIRCULAIRE ALTERNATIF (Ordre levier).

412. *Combinaison de leviers et de bielles*. Le système bielle et manivelle est, comme nous l'avons vu, le moyen par excellence

pour produire les mouvements alternatifs; mais la loi compliquée des vitesses qui s'y produisent, pour une rotation uniforme de l'axe moteur, ne convient souvent pas; on la modifie alors par une combinaison, soit d'organes semblables, soit d'organes différents.

Nous traiterons d'abord du moyen de rendre plus uniforme le mouvement circulaire obtenu par un mouvement uniforme du levier, puis nous rapporterons, d'après M. Willis, quelques exemples de combinaisons de bielles, qui constituent des mécanismes certains dans leurs effets, à faibles frottements, dont l'emploi est par suite avantageux quand il est possible. Ces mouvements deviennent trop compliqués pour que les formules complexes, auxquelles mènerait leur étude, puissent être de quelque utilité pratique. On remplace souvent celles-ci avec avantage par des tracés qu'on obtient facilement, et qui donnent une notion claire de tous les mouvements qui se produisent en même temps dans les diverses parties d'un système de ce genre.

Manivelles multiples.

413. Nous savons (art. 296) qu'avec une seule manivelle le moment (1) de la force varie de 0 à Pr, en partant du point A pour arriver au point C.

Manivelles doubles. Si au lieu d'appliquer la force P à une seule manivelle agissant au point E, on fait agir deux forces égales à $\frac{1}{2}$ P sur deux manivelles assemblées aux points E et F (l'angle EOF étant de 90° (fig. 337), cette disposition fournira le maximum le plus élevé, quand α étant égal à 45° pour une manivelle, aura la même valeur pour l'autre), le moment de la première variera de 0 à $\frac{1}{2}$ Pr, tandis que celui de la seconde variera de $\frac{1}{2}$ Pr à 0. Les angles α et α'

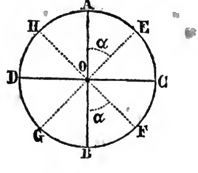


Fig. 337.

(1) Nous appelons moment la quantité de travail en chaque instant, divisée par l'angle de rotation ω qui est le même pour tout le système tournant autour de l'axe.

étant évidemment complémentaires, quand les manivelles se déplacent le moment total sera pour une position quelconque :

$$M = \frac{1}{2} Pr (\sin. \alpha + \cos. \alpha).$$

On peut poser $\sin. \alpha + \cos. \alpha = \sin. (45° + \alpha) \sqrt{2}$, formule facile à vérifier en développant le second terme, et remarquant que $\sin. 45° = \cos. 45° = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

La plus petite valeur du sinus ou $\alpha = 0$, donnera le minimum et la plus grande ou $45° + \alpha = 90°$ ou $\alpha = 45°$ le maximum.

On aura donc :

Minimum. $\alpha = 0$, $\sin. 45° = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, d'où $M = \frac{1}{2} Pr$.

Maximum. $\alpha = 45°$, $\sin. (45° + \alpha) = 1$, d'où $M = \frac{1}{2} Pr \sqrt{2}$.

Le rapport du minimum au maximum est de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0,707.

On voit que les limites de variation sont bien moindres qu'avec une manivelle simple et surtout, ce qui peut être important, que l'action de la force n'est jamais nulle.

La construction graphique donnée précédemment (fig. 338) pour

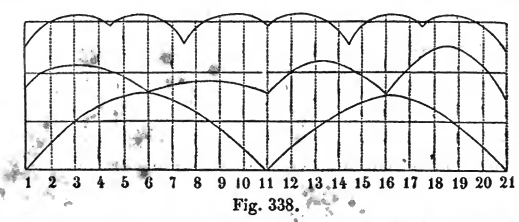


Fig. 338.

représenter le travail de la bielle et les rapports des vitesses du bouton de la manivelle et de l'autre extrémité de la bielle (1), s'applique à ce cas et fait bien sentir comment les choses se passent.

En effet, puisque nous avons déterminé pour une manivelle simple, dans vingt positions différentes, les moments des efforts

(1) Nous empruntons à M. Morin cette figure tracée pour le cas d'une bielle courte, comme le montre la non symétrie des courbes.

qui sont les ordonnées des courbes dont l'aire représente le travail; pour passer de ce cas à celui des manivelles multiples, il n'y a qu'à ajouter sur chaque ordonnée les moments correspondants aux positions de chacune des manivelles considérées, ce qui donnera le moment total des efforts simultanés transmis aux manivelles et les courbes qui feront apprécier les variations du travail et des rapports de vitesse en chaque instant (L'échelle de la figure est alors double, car les deux effets deviennent $\frac{1}{2}$ P). La figure montre bien la régularité plus grande, les moindres variations de vitesses obtenues par l'emploi de manivelles doubles.

414. *Manivelles triples.* En disposant une troisième manivelle au point G (fig. 337) (la bielle agit alors en remontant) et faisant agir chacune des trois bielles avec un effort égal à $\frac{1}{3}$ P, la régularité ne croîtrait pas. En effet, les moments deviennent :

$$M = \frac{1}{3} Pr \sin. \alpha + \frac{1}{3} Pr \sin. \alpha' + \frac{1}{3} Pr \sin. \alpha$$
$$= \frac{1}{3} Pr (2 \sin. \alpha + \cos. \alpha).$$

Pour $\alpha = 0$, $\sin. \alpha = 0$, $\cos. \alpha = 1$; on a $M = \frac{1}{3} Pr$.

Pour $\alpha = 45°$, on a : $\sin. \alpha = \cos. \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

et $M = \frac{1}{3} Pr \times \frac{3}{2} \sqrt{2} = \frac{2}{3} Pr \sqrt{2}$ la variation est donc plus grande que dans le cas précédent.

Une quatrième manivelle placée en H, les trois autres en E, E, G, n'aurait aucun effet à cause de la symétrie de la figure, la force divisée en quatre parties agirait absolument de la même manière que divisée en deux parties et agissant sur les deux premières manivelles. Il est nécessaire, pour obtenir une plus grande régularité, de mettre les bras de manivelle multiples en nombre impair, autrement l'effet est le même que pour les manivelles dont le nombre des bras est moitié moindre.

Si au lieu de disposer la manivelle triple ainsi que nous venons de le supposer, on en place les trois boutons à égale distance sur la

circonférence, c'est-à-dire sur les trois sommets du triangle équilatéral inscrit (fig. 339), alors les variations sont moindres que pour les manivelles doubles. En effet, dans ce cas, si la rotation d'un angle α se produit, il est facile d'évaluer la somme des moments des trois forces $\frac{1}{3}$ P agissant sur les manivelles. Cette quantité sera égale, d'après la propriété du côté du triangle équilatéral d'être la corde d'un angle de $\frac{360}{2} = 120°$, à

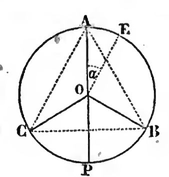


Fig. 339.

$$M = \frac{1}{3} Pr\,(\sin.\ \alpha) + \sin.\ (60° - \alpha) + \sin.\ (60° + \alpha).$$

Or, le sinus du sommet placé seul d'un côté du diamètre est égal à la somme des deux autres.

En effet, on a :

$$\text{Sin. } (60° + \alpha) = \sin.\ 60° \cos.\ \alpha + \sin.\ \alpha \cos.\ 60°.$$

Or, $\cos.\ 60° = \frac{1}{2}$, d'où $\sin.\ 60° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Donc $\sin.\ (60° + \alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin.\ \alpha.$

De même : $\text{Sin. } (60° - \alpha) = \sin.\ 60° \cos.\ \alpha - \sin.\ \alpha \cos.\ 60°$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos.\ \alpha - \frac{1}{2} \sin.\ \alpha.$

En ajoutant $\sin.\ \alpha$, on retombe précisément sur la valeur de $\sin.\ (60° + \alpha)$; donc la somme des moments sera :

$$M = \frac{1}{3} Pr \times 2 \sin.\ (60° + \alpha).$$

Le minimum correspond à $\alpha = 0$, à la position indiquée sur la figure 339, qui est celle de la plus petite valeur de $\sin.\ (60 + \alpha)$; quand $\alpha = 0$ et que le point A vient à passer du côté droit du diamètre; dans ce cas, la formule donne :

$$M = \frac{1}{3} Pr \sqrt{3}.$$

Le maximum a lieu pour $60° + \alpha = 90°$ ou $\alpha = 30°$, et alors un

des sommets (C par exemple) est sur le diamètre horizontal. Dans cette position, l'action étant au maximum pour ce sommet, a lieu utilement pour les deux autres. Alors sin. $(60^\circ + \alpha) = 1$,

$$M = \frac{2}{3} Pr,$$

et le rapport du minimum au maximum est $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$.

On peut donc établir le tableau suivant pour le rapport du maximum au minimum dans chaque cas :

	Minimum.	Maximum.
Manivelle simple.	0,000	1
Manivelle double.	0,707	1
Manivelle triple.	0,866	1

C'est-à-dire qu'à mesure qu'on fait croître le nombre des manivelles, les variations diminuent.

415. La fig. 338 (considérée comme à échelle triple quant aux ordonnées, puisque les trois efforts sont $\frac{1}{3}$ P) montre la courbe des vitesses dont les ordonnées sont obtenues en ajoutant celles de la vitesse de chaque manivelle ; elle fait apprécier toute la régularité du mouvement produit à l'aide de manivelles triples.

Le mouvement est presque aussi régulier avec des manivelles triples que si les puissances agissaient tangentiellement à une roue. Mais, dans la pratique, ces manivelles sont inexécutables à cause de la difficulté de maintenir en ligne droite, sans qu'il naisse des résistances considérables, les appuis d'un arbre quand il y en a plus de deux (et il en faut quatre au moins pour des manivelles triples enarbrées à un seul axe). Nous rapporterons, d'après M. Poncelet, la disposition suivante employée pour tourner cette difficulté d'exécution.

L'arbre des manivelles se compose de deux parties séparées, dont la première porte deux manivelles et l'autre une troisième, de manière que la projection de ces manivelles sur un même plan perpendiculaire à l'axe partage la circonférence *abc* en trois parties égales. Un autre arbre AB, parallèle aux premiers axes, reçoit le mouvement du moteur, et le transmet au moyen de deux roues

égales qui en engrènent chacune avec deux autres roues aussi égales entre elles, et montées respectivement sur les deux parties de l'arbre de la manivelle triple. Il est évident que les roues mon-

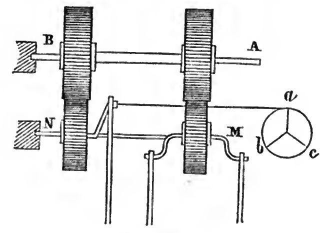


Fig. 340.

tées sur l'arbre AB auront toujours la même vitesse, et que si, dans le principe, les trois bras de manivelle forment des angles égaux, cette position ne changera pas et les choses se passeront comme pour une manivelle triple ordinaire.

Second exemple. — Vitesse de l'axe pour que le mouvement transmis par la manivelle soit uniforme.

416. Si la manivelle tourne avec une vitesse variable, si son axe est mené par un second axe qui tourne d'un mouvement uniforme, et que les deux axes soient mis en rapport par un des systèmes décrits pour obtenir des rapports de vitesse variables, les inégalités de vitesse dans la pièce mue d'un mouvement alternatif peuvent être entièrement effacées.

Supposons les deux axes réunis par deux courbes dentées, soit A_1 la vitesse angulaire constante du premier axe, A_2 celle du second auquel est fixée la manivelle, soit ρ le rayon de celle-ci, θ l'angle qu'elle fait avec la pièce à mouvement rectiligne alternatif mue par la manivelle, V la vitesse linéaire de cette pièce, on a (art. 294) : $V = \rho \sin. \theta A_2$, quantité constante par hypothèse.

Soient r_1 r_2 les rayons vecteurs au point de contact des courbes, par lesquelles les deux axes sont réunis.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{c - r_2}{r_2},$$ c étant la distance des axes;

d'où $\dfrac{V}{A_1} = \dfrac{c - r_2}{r_2} \rho \sin. \theta = k$ rapport constant par hypothèse;

$$\text{d'où } r_2 = \frac{c \rho \sin. \theta}{\rho \sin. \theta + k},$$

équation de la courbe du second axe, d'où celle du premier se déduit comme nous l'avons vu (1).

(1) Comme cet exemple est curieux, cherchons à compléter cette solution.

Puisque V et A_1 sont constants, ils sont proportionnels aux espaces décrits par la pièce à mouvement alternatif, et par un point distant de l'unité du premier axe, et comme une révolution correspondant à une double oscillation, on a :

$$\frac{V}{A_1} = \frac{2\rho}{\pi} = k, \text{ d'où } r_2 = \frac{c \rho \sin. \theta}{\rho \sin. \theta + k} = c \frac{\pi \sin. \theta}{\pi \sin. \theta + 2},$$

pour déterminer la deuxième courbe. Or, pour la première, nous avons l'équation (page 226) :

$$\theta_1 = \int \frac{r_2 \, d\theta}{c - r_2} = \frac{\pi}{2} \int \sin. \theta \, d\theta = C - \frac{\pi}{2} \cos. \theta,$$

quand $\theta = 0$ et $\frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ respectivement,

donc $C = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}(1 - \cos. \theta) = \frac{\pi}{2} \sin. \text{vers.} \theta$; enfin $r_1 = c - r_2$,

ce qui donne la première courbe. Dans la table ci-après, nous donnons assez de valeurs des coordonnées polaires deux courbes, pour qu'on puisse les construire par points.

AXE CONDUIT.		AXE CONDUISANT	
θ	$\frac{r_2}{c}$	θ_1	$\frac{r_1}{c}$
0°	0	0°	1
5°	,1204	0° 20'	,8796
10°	,2143	1° 22'	,7857
15°	,2890	3° 4'	,7110
20°	,3495	5° 25'	,6505
30°	,4399	12° 4'	,5601
40°	,5025	21° 3'	,4975
50°	,5461	32° 9'	,4539
60°	,5763	45°	,4237
70°	,5963	59° 13'	,4037
80°	,6075	74° 23'	,3925
90°	,6109	90°	,3891

Les rayons de ces courbes devenant nuls pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, leur figure res-

Dans la pratique, les figures déduites de ces formules doivent toujours être modifiées pour éviter un changement trop brusque de direction du mouvement.

Des courbes analogues à celles que nous venons de considérer s'emploient dans quelques moulins à soie, mais leur figure n'est pas complétement celle qui satisfait aux principes.

Au reste, toute disposition qui produit deux périodes égales de variation de vitesse angulaire, suffit dans la pratique pour corriger suffisamment la variation de la vitesse d'une pièce mue par une manivelle. Si par exemple, l'axe de la manivelle est conduit par un axe à mouvement uniforme qui lui est réuni par un joint universel, et que ces axes se coupent sous un angle suffisant, la rotation de ce joint passant par deux maxima et deux minima de vitesse à chaque révolution, si on fait en sorte qu'ils soient opposés à ceux que produit la manivelle, l'inégalité de vitesse deviendra insensible.

Troisième exemple. — Moyen de rendre constant le rapport des vitesses angulaires de deux manivelles.

417. A est l'axe d'une manivelle à l'extrémité de laquelle est articulée la bielle a C (fig. 341), dont le point C est maintenu sur la droite

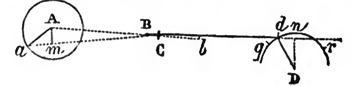


Fig. 341.

Ab par des guides, et sur laquelle il se meut alternativement de b en B et de B en b. En ce point C de la bielle, articulez une autre bielle Cd qui agit par son extrémité d sur la manivelle dD, tournant autour du centre D d'un mouvement alternatif dont les points ex-

semble à celle-ci ∞ . Les points de rebroussement correspondent au passage de la manivelle aux points morts; en ces points il n'y a pas de vitesse communiquée à la pièce qui se meut d'un mouvement alternatif, la vitesse de la manivelle devrait donc être infinie pour satisfaire à la condition de produire une vitesse constante du mouvement alternatif et par suite pour que le temps nécessaire au changement de direction fût nul. Comme cela est impossible en pratique, il est nécessaire d'altérer la figure de la courbe en ces points, d'en arrondir les angles, en raccourcissant en même temps les rayons vecteurs des points correspondants de la courbe motrice.

trêmes sont r et q. Considérons le système dans une position quelconque, abaissons des centres de mouvement sur les bielles respectives les perpendiculaires Am, Dn, et soient A_1 la vitesse angulaire de Aa, A_2 celle de Dd, V la vitesse absolue du point C, on aura sensiblement, d'après ce qu'on a vu (art. 264) :

$$A_1 \times Am = V = A_2 \times Dn, \text{ ou } \frac{A_2}{A_1} = \frac{Am}{Dn}.$$

Si le tracé est tel que Aa et Dd atteignent en même temps des positions perpendiculaires à la bielle, Am et Dn atteindront en même temps leurs valeurs *maxima*; ces lignes croîtront et décroîtront ensemble, de telle sorte que le rapport $\frac{Am}{Dn}$ sera à peu près constant; si donc Aa tourne d'un mouvement uniforme, Dd se mouvra d'un mouvement alternatif dans chaque direction avec une vitesse beaucoup plus voisine de l'uniformité que celle du point C.

Quatrième exemple. — Obtenir un mouvement dont la vitesse décroisse rapidement.

418. A, B, D sont les centres de révolution respectifs des trois

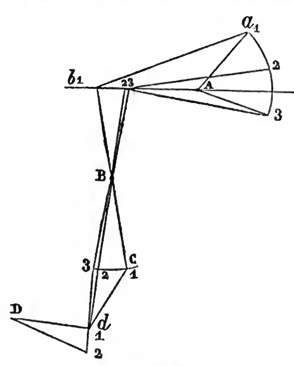


Fig. 342.

bras de levier Aa, Dd et bBC (fig. 342). Ces bras sont liés par les bielles ab et Cd, qui complètent la transmission du mouvement de Aa à Dd.

Soit l'amplitude du mouvement de A*a* limitée à l'arc de cercle 1 2 3, partagez cet arc en deux parties égales et placez *b*A, ligne tangente au petit arc de cercle décrit par *b*, de telle sorte qu'elle coupe en deux parties égales l'angle 2A3, décrit par *a* en passant de 2 à 3. On sait que le mouvement du bras B*b* mu par la bielle *ab*, variera comme le sinus verse de l'angle compris entre les lignes A*a* et *b*A ; donc le mouvement de *b* pendant que *a* passe de 1 à 2, sera beaucoup plus grand que celui qu'il reçoit pendant le passage du même point de 2 à 3. Les positions correspondantes de *a* et *b* sont, au reste, marquées sur la figure.

En pratique, le second mouvement est si faible que cette combinaison peut être employée, même quand le bras B*b* doit rester en repos pendant la seconde partie 2, 3 du mouvement de A*a*.

Si on dispose le bras D*d* par rapport à BC, de telle sorte que la tangente à l'arc décrit par *d* coupe en parties égales le petit angle 2B3 décrit par C, pendant son passage de la seconde position 2 à la troisième 3, le mouvement que D*d* recevra de A*a* pendant la seconde période sera encore considérablement plus petit que le petit mouvement de B*b*. Ce mécanisme est employé dans la harpe d'Érard.

Cinquième exemple. — Multiplier les oscillations en multipliant les bielles et les leviers.

419. Si une manivelle ordinaire A*a* (fig. 343) est réunie par une bielle *ab* avec un levier tournant autour du centre B, on a vu que chaque révolution de la manivelle produit une double oscillation du levier B*b*, et par suite aussi du levier coudé BC monté sur le même axe.

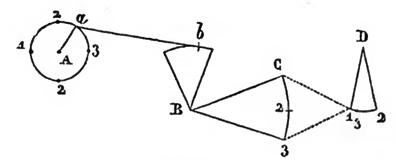


Fig. 343.

Soit un autre levier D2 joint par une bielle au levier BC, dans une position telle que la tangente à l'arc décrit par l'extremité de D2 divise en deux parties égales l'angle décrit par BC. Les chif-

fres 1, 2, 3 marqués sur la circonférence décrite par la manivelle et sur les arcs décrits par BC et par D 2, indiquent les positions correspondantes des pièces. Le mouvement de BC, de B_1 à B_3, dans une seule direction, produit une oscillation double complète, de D 2 entre les positions D_3^1 et D 2, et réciproquement comme on le voit dans la figure ; une double oscillation de BC ou un tour de la manivelle produit donc deux doubles oscillations complètes de D 2. Si un autre levier était assemblé à D 2, de la même manière que celui-ci est réuni à BC, une révolution de la manivelle produirait quatre doubles oscillations du dernier levier, et pour un train de n axes, chaque révolution de la manivelle produirait 2^{n-2} doubles oscillations complètes d'un levier.

C'est cette disposition que M. Saladin a appliquée avec succès aux métiers à tisser mécaniques pour produire deux coups du battant par chaque tour de manivelle, ou au moins la disposition sensiblement équivalente que représente la fig. 344 dans laquelle la bielle

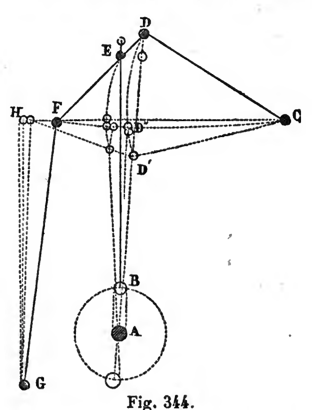


Fig. 344.

BE, mue par la manivelle AB, fait passer le levier CD au-dessus et au-dessous de l'horizontale, de telle sorte qu'à l'extrémité de c aque oscillation simple de CD et pour chaque demi-tour de la manivelle AB, GF a accompli une double oscillation et est revenu à sa position initiale.

Sixième exemple. — Production d'un mouvement alternatif intermittent par des leviers et des bielles.

420. A est le centre de mouvement d'une manivelle, qui par le moyen de la bielle 2, 2 fait osciller le levier B *b* entre les positions B 1 et B 3 (fig. 345). L'extrémité *b* de ce levier est assemblée non

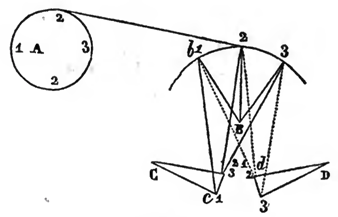


Fig. 345.

seulement à la bielle 2, 2, mais encore aux deux autres bielles *bc* et *bd*. La bielle *bc* est réunie avec un levier C*c* dont le centre de mouvement est en C, tel que la tangente au cercle qu'il décrit à son extrémité passe par B et coupe en deux parties égales l'angle 2 B 3. Par suite, comme dans le quatrième exemple, quand *b* se meut de 1 à 2, C*c* se meut de C*c* 1 à c^2_3; mais quand *b* se meut de 2 à 3, C*c* reste sensiblement dans la position Cc^2_3. D'un autre côté, la bielle *bd* est tracée comme la précédente; la tangente à l'arc que décrit le point *d* passe par B et coupe en deux parties l'angle 1 B 2; par suite, quand *b* passe de 1 à 2, D *d* reste dans la position Dd^1_2, mais quand *b* passe de 2 à 3, D*d* passe de Dd^1_2 à D 3.

L'effet de cet arrangement est que quand la manivelle tourne, les leviers C*c* et D *d* oscillent avec des intervalles de repos, l'un se mouvant quand l'autre est immobile et *vice versâ*, ce qui peut être indiqué par le tableau suivant pour un tour complet de manivelle :

La manivelle se meut	de 1 à 2, *Cc* s'élève, *Dd* reste en repos,
	de 2 à 3, *Cc* est en repos, *Dd* s'abaisse,
	de 3 à 2, *Cc* est en repos, *Dd* s'élève,
	de 2 à 1, *Cc* s'abaisse, *Dd* est en repos.

421. Une représentation graphique est excellente pour faire sentir les périodes de ces mouvements.

Soit B*b* l'axe vertical de la courbe qui représente le mouvement du levier B*b*; C*c* et D*d* les axes des courbes qui représentent les mouvements qui ont lieu en même temps des leviers C*c* et D*d*.

Portons sur l'axe B*b* une longueur égale à celle de la circonférence du cercle décrit par la manivelle divisée en douze angles égaux (la fig. 346 est construite pour une révolution et demie, afin qu'on voie mieux la loi du mouvement); supposons que la manivelle se meût uniformément, et par les points de division menons des perpendiculaires proportionnelles aux espaces ou arcs décrits par les extrémités des leviers respectifs. Ainsi les abcisses de la courbe B *b* sont proportionnelles aux distances de l'extrémité *b* de B*b* à la position extrême B*b*1. Ces longueurs seront facilement obtenues en traçant la figure précédente à une grande échelle, pour diverses positions des leviers.

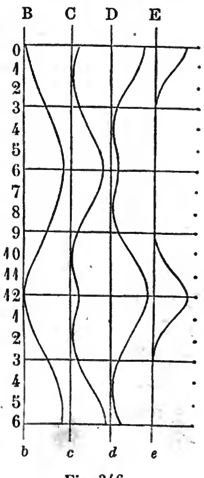


Fig. 346.

On voit que la double oscillation de B*b* de 0 à 12 est convertie en C*c* en deux doubles oscillations, l'une qui s'étend de 2 à 10 qui est grande, et l'autre de 10 à 2 qui est petite, et peut être considérée comme se confondant avec un état de repos. Les oscillations de D*d* sont semblables, mais la grande oscillation correspond à la petite de B*b* et *vice versâ*.

On peut encore réduire si l'on veut les petites oscillations, en attachant (comme dans le quatrième exemple) un nouveau levier à chacun des leviers C*c*, D*d* du présent système. La courbe E*e* représente le mouvement de ce levier en le supposant attaché à D*d*; on voit que la petite oscillation disparaît alors, et que la courbe se réduit en partie à une ligne droite qui se confond avec l'axe des ordonnées.

Septième exemple. — Emploi de deux roues dentées pour faire agir ensemble deux manivelles sur une même barre.

422. A l'aide de deux roues dentées égales, montées sur les axes de deux manivelles agissant sur une même barre, on peut annuler l'obliquité d'action que produit une bielle unique employée à produire le mouvement rectiligne alternatif. Ce système est connu sous le nom de *balancier de Cartwight.*

Il se compose (fig. 347) d'une pièce B assemblée d'équerre à l'extrémité d'une tige et des extrémités desquelles partent deux bielles d'égale longueur, articulées à deux manivelles égales montées sur les mêmes axes que deux roues dentées de même rayon. Les deux bielles étant placées symétriquement, les extrémités de la barre B descendent à chaque instant d'une quantité égale et la tige T a un mouvement rectiligne alternatif. Si une des roues était plus petite que l'autre, le nombre des tours de chaque roue, pendant un même espace de temps n'étant plus le même, la traverse B oscillerait. On pourrait encore employer cependant ce système pour obtenir un mouvement rectiligne en articulant la barre B sur la tige, et guidant celle-ci dans des coulisses, mais en faisant naître bien inutilement des résistances nuisibles.

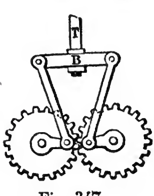


Fig. 347.

La barre T passant par le point de contact des circonférences primitives, et les articulations des bielles sur la barre B étant éloignées d'une distance égale à celle des centres, la vitesse est évidemment la même que pour le cas d'une seule bielle. Au contraire le rapport des vitesses, si les deux bielles aboutissaient à la tige du mouvement rectiligne, ne serait plus le même que dans le cas de la manivelle, la direction de la barre T ne passant plus par le centre du mouvement.

Soit r le rayon des manivelles, R celui des circonférences primitives des roues, l la longueur des bielles, θ l'angle des bielles avec la direction de la barre T, on trouve facilement que la distance du point B à la ligne des centres des deux roues dentées est égale en chaque instant à :

$$\sqrt{l^2 - (R \pm r \sin.\theta)^2} \qquad r \cos.\theta.$$

XI.

MOUVEMENT QUELCONQUE EN MOUVEMENT D'APRÈS UNE COURBE.

423. Revenons au problème de produire le mouvement d'après une courbe donnée à l'aide d'un mouvement rectiligne ou circulaire. Ce mouvement ne se présente guère dans l'industrie que pour faire mouvoir certains outils ; il ne se rencontre pas dans les récepteurs, la nature ne présentant que des forces qui agissent suivant des directions constantes et qui peuvent toujours s'utiliser par des systèmes à mouvement rectiligne ou circulaire.

Le mouvement suivant une courbe ne peut être produit par un mouvement simple qu'à l'aide d'un guide courbe, c'est-à-dire, qu'autant que chaque élément de ce guide, considéré comme une petite ligne droite, comme un guide de l'ordre plan, vient assurer le mouvement suivant un élément de la courbe. Les résistances passives qui s'opposent au mouvement dans un semblable système font facilement comprendre pourquoi ce genre de mouvement n'existe pas dans l'intérieur des machines, n'est jamais employé dans un organe de communication du mouvement, et n'est en général que le mouvement final de l'opérateur, quelquefois nécessaire d'après la nature du travail à effectuer.

Quoi qu'il en soit, voyons les solutions possibles de ce problème qui peut évidemment se poser ainsi : *Tracer une courbe quelconque à l'aide d'un mouvement rectiligne ou d'un mouvement circulaire;* l'opérateur ou la pièce à mouvoir, s'il est autre qu'un outil pour tracer, étant assujetti à suivre le point qui trace la courbe.

Cette étude va nous faire sentir comment le mouvement suivant une courbe pouvant être produit par une combinaison de mouvements simples, la question se réduit à une application des systèmes déjà étudiés, au point de vue du tracé qui résulte de la combinaison de leurs mouvements.

1° MOUVEMENT RECTILIGNE EN MOUVEMENT D'APRÈS UNE COURBE.

424. Le mouvement suivant une droite ne peut engendrer un mouvement suivant une courbe qu'autant que la pièce poussée en ligne droite passe dans une rainure courbe, ce qui revient au mou-

vement suivant deux droites, puisqu'en chaque instant la pièce parcourt la face d'un petit plan incliné, c'est-à-dire se meut comme si elle s'avançait suivant deux droites qui seraient les côtés de ce plan incliné, avec des frottements bien moins considérables que dans le premier système ; ce dernier, équivalant au premier, lui est donc bien préférable ; d'ailleurs l'action du premier devient impossible dans certaines positions, la question étant évidemment la même que celle étudiée précédemment comme réciproque de la poussée d'une barre par un excentrique.

Combinaison de deux mouvements rectilignes.

425. Pour produire un mouvement suivant un élément de courbe à l'aide de mouvements rectilignes, il convient donc d'employer les mouvements de deux droites qui se coupent (nous les supposerons à angle droit dans tout ce qui va suivre pour plus de simplicité, mais tout ce que nous dirons s'applique au cas où l'inclinaison serait quelconque) pour tracer toute espèce de courbes. Les points de rencontre de ces deux droites détermineront des successions de points disposés en raison des vitesses de ces droites, et pourront servir à tracer tout genre de courbes.

Ces droites, en effet, ne seront autre chose que les coordonnées rectilignes d'une courbe rapportée à deux axes parallèles aux mouvements rectilignes, et puisque toute courbe peut être représentée par une équation qui représente les relations de ses deux coordonnées, toute courbe sera aussi tracée par deux lignes dont les longueurs varieront en raison des relations exprimées par l'équation de la courbe.

Mais, ainsi que nous l'avons vu, pour donner un mouvement varié à une droite en raison de la variation des coordonnées, il faut employer une courbe, et cette courbe sera évidemment la même que celle qu'il s'agit de tracer.

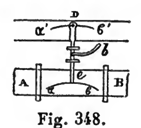


Fig. 348.

En effet, soit AB (fig. 348) une barre douée d'un mouvement rectiligne, plaçons sur cette barre une courbe saillante α 6, et assujettissons une barre *e*D à se mouvoir en ligne droite en pressant sur cette courbe par l'effet d'un ressort, il est évident que le point D

extrémité de cette droite aura un mouvement rectiligne correspondant à toutes les distances des divers points de la courbe à l'axe AB, et que si au point D on place un outil, celui-ci tracera sur un plan qui aurait le même mouvement que AB une courbe $\alpha' 6'$, identique à la courbe $\alpha 6$.

426. C'est en traçant ainsi les courbes qui correspondent à toutes les sections d'une surface par des plans parallèles équi-distants, que M. Collas trace dans sa machine à graver les médailles, sur un plan parallèle à ces sections, une succession de courbes qui représentent admirablement la surface modèle. Il faut, pour réaliser cette machine, placer à angle droit le modèle et la planche, les faire marcher de quantités égales pour chaque courbe, et faire suivre le modèle par la touche dans le plan parallèle au plan à graver sur lequel la courbe est tracée par le burin qui fait corps avec la touche.

427. Supposons maintenant le système précédent répété à angle droit du premier, qu'une barre A'B' douée d'un mouvement rectiligne porte une courbe $\alpha'' 6''$, sur laquelle s'appuie une tringle CD

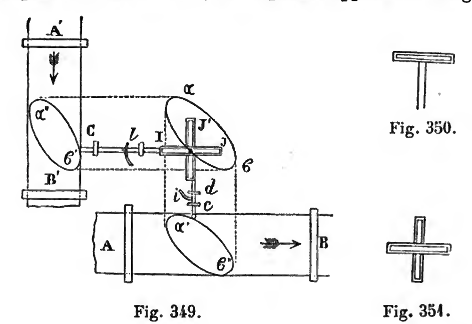


Fig. 349. Fig. 350. Fig. 351.

(fig. 349) comme la barre AB porte la courbe $\alpha' 6'$, sur laquelle s'appuie la tringle cd, ces deux droites étant terminées par des rainures IJ, I'J' perpendiculaires à leur direction (fig. 350 et 351), un point de chacune de ces rainures tracera une droite perpendiculaire à la direction du mouvement, et sa vitesse sera en raison de la forme de la courbe directrice.

Un outil placé à la rencontre des deux rainures IJ, I'J', tracera

une courbe qui sera déterminée par le mouvement rectiligne des deux premières.

La courbe ainsi déterminée par l'intersection de deux coordonnées sera telle, que si le mouvement des deux barres est le même, la vitesse la même, les deux courbes directrices $\alpha' \beta'$, $\alpha'' \beta''$ devront être identiques avec la courbe à obtenir $\alpha \beta$.

Ainsi si la courbe à tracer est donnée par une équation entre ses coordonnées x et y, la courbe $\alpha \beta$ aura évidemment par construction toutes les mêmes valeurs de y (l'axe des y étant l'axe de A′B′) que la courbe $\alpha' \beta'$, augmentée d'une constante l, égale à la longueur de CD.

Par la même raison, les valeurs de x de la courbe $\alpha'' \beta''$ donneront les valeurs de x de la courbe $\alpha \beta$, en les augmentant d'une même quantité l' égale à la longueur de C′D′.

Puisque, par hypothèse, les mouvements rectilignes sont tels, que pendant que la tige CD parcourt tous les points de $\alpha' \beta'$, ceux de la tige C′D′ parcourent tous les points de $\alpha'' \beta''$, les abcisses x seront déterminées par la courbe $\alpha'' \beta''$ et les ordonnées y par la courbe $\alpha' \beta'$ (comme il résulte de la disposition des rainures).

Si par exemple la courbe cherchée était une ellipse dont l'équation rapportée aux axes de AB, A′B′ fût $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 x y + d^2 = 0$, la courbe $\alpha'' \beta''$, pour laquelle toujours $x' = x - l$ (l étant la longueur de la tige CD), devra avoir une équation de forme telle qu'en remplaçant $x - l$ par x, on retombât sur l'équation précédente, autrement les valeurs de $x - l$ pour les valeurs de y ne sauraient être toutes celles voulues. Les deux courbes $\alpha'' \beta''$, $\alpha' \beta'$ seront donc :

$$a^2 (x - l)^2 + by^2 + c^2 (x - l)\, y + d^2 = 0$$
$$\text{et } a^2 x^2 + b^2 (y - l')^2 + c^2 x\, (y - l') + d^2 = 0,$$

c'est-à-dire deux ellipses identiques à la première transportées à des distances l et l', parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y. La solution se réduit en réalité à un transport de courbe.

428. Au point de vue pratique, l'emploi de deux barres qui représentent les deux coordonnées qui se coupent et qui portent deux rainures pour emboîter l'outil qui trace la courbe, est évidemment défectueux. On pourrait, pour le cas de simples tracés de courbes,

employer une disposition bien préférable et suffisamment pratique, qui est équivalente. Elle consiste à faire communiquer un mouvement convenable au plan sur lequel la courbe doit être tracée par l'action d'une des barres, pendant qu'une seule pièce portant l'outil tracerait la courbe sur ce plan par l'effet du mouvement relatif des deux coordonnées.

429. Il est peu intéressant de considérer le cas où les vitesses du mouvement rectiligne ne seraient pas égales. Si m est le rapport des vitesses, l'une des barres portant la courbe à tracer, l'autre portera une courbe représentée par la même équation que celle de la courbe, en multipliant par m la coordonnée qui ne doit pas être fournie par son mouvement. Ce sera une courbe différente de la première, mais de même degré et de même nature; ainsi, dans l'exemple qui précède, ce sera une ellipse allongée qui fournira les mêmes coordonnées que les courbes du cas précédent, sauf qu'elle doit les déterminer par un mouvement plus rapide.

2° MOUVEMENT CIRCULAIRE EN MOUVEMENT D'APRÈS UNE COURBE.

430. Le seul mouvement circulaire d'un point, l'assemblage à l'aide duquel il est maintenu à une distance constante du centre ne peut servir qu'à tracer un cercle. Pour qu'un mouvement circulaire puisse faire naître un mouvement d'après une courbe, il faudrait qu'un rayon du cercle poussât la pièce dont l'extrémité fût engagée dans un guide courbe; mais on voit qu'alors, en réalité, il y a double mouvement, c'est-à-dire mouvement circulaire et mouvement rectiligne simultanés. Nous allons étudier cette solution en détail, mais auparavant voyons comment la combinaison de deux mouvements de même nature, de deux mouvements circulaires, peut servir à déterminer les deux coordonnées rectilignes d'une courbe, et par suite cette courbe.

Combinaison de deux mouvements circulaires pour obtenir les coordonnées rectilignes d'une courbe.

431. Le mouvement circulaire pouvant se transformer en mouvement rectiligne suivant une loi voulue ou une courbe voulue, ce

qui est la même chose, à l'aide d'excentriques ayant la forme de ces courbes, il est possible (fig. 352) de tracer une courbe quelconque à l'aide d'un système analogue à celui déjà décrit pour le cas du mouvement rectiligne, c'est-à-dire à l'aide de règles guidées qu'un ressort applique contre les excentriques, ces excentriques étant montés sur les axes qui sont mus d'un mouvement circulaire.

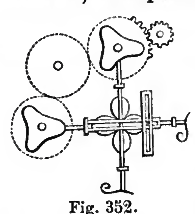


Fig. 352.

Les règles forment deux coordonnées dont l'intersection décrit la courbe voulue; si, par exemple, elles portent toutes deux des rainures, un crayon placé à leur rencontre tracera une courbe. Ce système ne peut guère être de bon usage dans la pratique; on le rendra moins imparfait en assemblant une des règles avec le plan sur lequel doit être tracée la courbe, l'autre règle portant assemblé à son extrémité l'outil qui doit la tracer.

432. Le tracé des excentriques convenables pour chaque cas se déduira facilement de la forme de la courbe à obtenir.

En effet, rapportant la courbe à tracer à des axes de coordonnées parallèles aux règles et passant par les centres de rotation, appelant ρ et ρ' les valeurs variables des rayons vecteurs des excentriques pour les points où les règles les touchent, on aura pour chaque point ainsi déterminé de la courbe à tracer $x=\rho+l$, $y=\rho'+l'$, l et l' étant les longueurs des règles.

La courbe à tracer étant connue, on déterminera un certain nombre m de valeurs de x pour des positions équi-distantes réparties sur toute la longueur de la courbe, puis divisant la circonférence de cercles en m parties égales, on portera sur chaque rayon vecteur la longueur correspondante de x, diminuée de la longueur l de la règle. On opérera de même pour obtenir l'autre excentrique.

Si, au lieu d'être la même que celle du premier, la vitesse angulaire de cet excentrique était p fois plus grande, il faudrait porter la longueur déterminée, comme précédemment, sur des rayons faisant des angles p fois la partie m de la circonférence.

Si la courbe est connue pour son équation, celle-ci donnera toutes les valeurs de ρ et ρ', en remplaçant x et y par $\rho+l$ et $\rho'+l'$, ce qui revient dans l'équation à la construction précédente, et montre que les relations entre les rayons vecteurs des deux excentriques sont précisément celles qui lient les coordonnées de la courbe à tracer.

Combinaison d'un mouvement circulaire et d'un mouvement rectiligne.

433. Revenons à la solution pratique qui est généralement la meilleure, à celle qui résulte de la combinaison d'un mouvement rectiligne avec un seul mouvement circulaire, un point d'une courbe étant déterminé par la position d'un point sur une droite faisant un angle voulu avec une droite donnée, ayant tourné d'une certaine quantité comme rayon d'un cercle. Ce système est précisément celui qui est employé pour exprimer une courbe à l'aide des coordonnées polaires, pour en obtenir l'équation dans laquelle on fait entrer comme variables la longueur du rayon vecteur et l'angle qu'il fait en chaque instant avec sa position initiale.

On ne doit pas s'étonner de rencontrer ici, comme solutions du problème consistant à décrire une courbe, les deux systèmes de coordonnées qu'emploie la géométrie analytique, car c'est réellement sur la notion du mouvement que repose la notion de celles-ci, et surtout bien clairement celle des coordonnées polaires.

434. Voyons comment on peut résoudre le problème pratiquement. Soit d'abord une courbe fermée dans l'intérieur de laquelle on peut trouver un point tel que toutes les droites qui passent par ce point ne puissent rencontrer que deux points de la courbe.

Fig. 353.

Soit ABD cette courbe (fig. 353), menons par le point C, centre du mouvement circulaire, un diamètre PQ, et sur ce diamètre assemblons une droite OT, qui ne puisse que glisser suivant sa longueur. L'ex-

trémité T tracera évidemment la courbe ABD, si l'extrémité O se meut par l'effet d'une cheville passant dans une rainure, suivant une courbe telle que l'équation de la courbe à tracer étant en coordonnées polaires $\rho = \varphi\ (\omega)$, celle de la courbe directrice soit, l étant la longueur OT, $\rho' + l = \varphi\ (\omega)$.

Le tracé de la courbe directrice s'obtiendra donc en diminuant d'une quantité l tous les rayons vecteurs de la courbe à obtenir mécaniquement.

Cette courbe est une *conchoïde,* nom donné plus spécialement au cas où la ligne à laquelle sont menés tous les rayons vecteurs est une ligne droite; elle constitue la courbe directrice qui, comme nous l'avons vu pour les excentriques, fournit le moyen d'obtenir, à l'aide d'un mouvement circulaire, le mouvement rectiligne suivant une loi donnée d'une barre guidée en ligne droite.

435. Examinons maintenant le cas des courbes fermées, pour lesquelles on ne peut trouver un point tel que toutes les lignes passant par ce point ne rencontrent la courbe qu'en deux points, telle par exemple que la courbe β faisant un nœud en B (fig. 354). Le problème n'est pas soluble comme ci-dessus, car alors le rayon vecteur ne peut avoir qu'une seule valeur pour chaque position, ne peut fournir le tracé de plus de deux points d'une même courbe pour chaque tour de rotation.

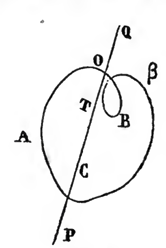


Fig. 354.

Mais, si on fait mouvoir la ligne OT non plus suivant PQ, mais suivant une direction faisant un angle constant avec le rayon vecteur, le point T peut alors décrire le nœud de la courbe.

En effet (fig. 355), quand PQ sera passé à la position P′Q′, si le point O s'approchant du centre C, vient en O′, le point T passera en T′ et aura éprouvé un mouvement rétrograde relativement à celui de PQ, le tracé pourra donc avoir lieu en général.

On ne peut donner une méthode générale pour déterminer l'angle COT que doit faire la ligne OT avec le rayon vecteur, ni la longueur OT la plus convenable pour tracer une courbe donnée. Ce

sera à l'aide des données spéciales à chaque cas, ou par quelques tâtonnements, qu'on parviendra à les déterminer. On pourrait

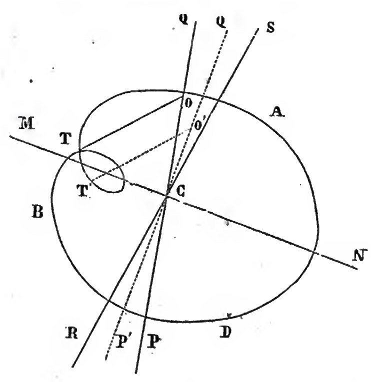


Fig. 355.

dans tous les cas calculer cette courbe pour chaque valeur adoptée ; mais cette possibilité théorique n'a pas de valeur d'application.

436. En effet, la courbe cherchée qui doit être tracée par le point T (fig. 355) étant donnée par son équation en coordonnées polaires $\rho = \varphi(\omega)$, CT étant le rayon vecteur, MCT étant l'angle ω, pour déterminer la courbe directrice que doit suivre le point O, le triangle TOC donne :

$$\sin.\ \mathrm{TCO} = \frac{\mathrm{OT}\ \sin.\mathrm{TOC}}{\mathrm{CT}} \text{ ou } \mathrm{TCO} = \text{angle}\left(\sin.\ \frac{\mathrm{OT}\sin.\mathrm{TOC}}{\mathrm{CT}}\right).$$

Cet angle ajouté à l'angle $\mathrm{TCM} = \omega$, correspondant au point T de la courbe, fera donc connaître l'angle OCM et la longueur OC, puisque tout est déterminé dans le triangle OCT. On aura donc l'équation en coordonnées polaires de la courbe décrite par le point O, courbe qui devra être de la nature de celles étudiées en premier. C'est d'après cette condition qu'on déterminera l'angle TOC et la longueur OT, dans tous les cas où le problème est soluble, en leur donnant des valeurs pouvant fournir une équation de la

courbe décrite par le point O, telle qu'elle soit une courbe sans nœuds (1).

437. Nous avons supposé dans ce qui précède que l'on faisait mouvoir le rayon vecteur d'un mouvement circulaire, et qu'en même temps on déterminait un mouvement rectiligne suivant la longueur de ce rayon, nécessairement alternatif pour obtenir toute courbe fermée.

La barre suivant laquelle se produit le mouvement rectiligne étant entraînée circulairement, on voit qu'il se produit ici un phénomène d'une nature différente de ceux étudiés jusqu'ici; les guides du mouvement rectiligne ne sont plus fixes, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent. Chaque point de la barre qui décrit une ligne droite pendant que celle-ci est mue d'un mouvement circulaire, par l'effet de deux mouvements simultanés parvient identiquement à la même position que si les deux mouvements s'étaient succédé.

438. La solution se simplifie beaucoup, pour ce qui est de l'exécution pratique, à l'aide de la méthode déjà indiquée dans les cas précédents, c'est-à-dire en divisant les mouvements de telle manière que la surface sur laquelle doit être tracée la courbe ait un mouvement circulaire, tandis que la ligne TO qui porte l'outil possédera un mouvement rectiligne; toute cette ligne, ou seulement le point O de celle-ci, se mouvant toujours dans la direction d'un rayon passant par le centre du cercle, ou plus généralement dans l'espace, par l'axe de la surface de révolution douée du mouvement circulaire.

Reprenons les deux cas qui correspondent aux deux positions de la ligne OT relativement au rayon vecteur, c'est-à-dire aux deux genres de courbes précédemment indiqués, et voyons ce que deviennent dans la pratique les procédés auxquels nous sommes conduits.

I. Dans les arts, l'organe qui communique le mouvement recti-

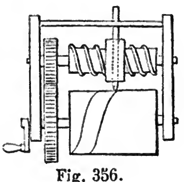
(1) L'équation en coordonnées rectilignes d'une courbe, qui peut être rencontrée par une droite en m points étant du degré m, les calculs ci-dessus indiqués seront toujours d'une extrême complication et le plus souvent échapperont pas aux ressources de l'analyse.

ligne au porte-outil est presque toujours la vis, l'écrou étant en général le porte-outil. La vis et la surface sur laquelle le tracé doit être fait, étant mues par les deux roues d'un même engrenage, fourniront les deux cas suivants :

1° L'axe de la vis qui met l'outil en mouvement passant par le centre de rotation, cet outil s'avancera des longueurs ρ, ρ', pendant qu'un rayon de la surface décrit les angles ω, ω', et si les deux mouvements sont uniformes, on a $\frac{\rho}{\omega} = a =$ Const.; c'est-à-dire qu'on trace ainsi une courbe plane, une spirale d'Archimède ($\rho = a\omega$) par deux mouvements uniformes.

Il est facile de déterminer a d'après le rapport des rayons des roues de l'engrenage et le pas de la vis. En effet, on a $r\omega = r'\omega'$, r, r' étant les rayons des roues qui font tourner la surface et la vis, p étant pas de la vis, $\frac{p}{n}$ sera la progression de l'écrou pour une partie n d'un tour égale à $r'\omega' = \frac{2\pi r'}{n}$. Donc en chaque instant $\rho = \frac{p}{n}$, $\omega = \frac{r'\omega'}{r} = \frac{2\pi r'}{rn}$ et $\frac{\rho}{\omega} = \frac{rp}{2\pi r'}$, quantité constante.

2° L'axe du mouvement circulaire est parallèle à la direction du mouvement rectiligne, ou peu incliné sur celle-ci, et la direction de l'outil passe par l'axe du mouvement circulaire.


Fig. 356.

Le tracé de la courbe sera fait sur la surface du cylindre. Si les deux mouvements sont uniformes, si le cylindre et la vis sont menés par deux roues dentées engrenant ensemble, on aura un système à l'aide duquel on pourra tracer une hélice sur la surface du cylindre, à l'aide duquel on pourra tailler sur un cylindre une vis d'un pas quelconque en disposant de roues d'engrenage dont les rayons soient dans un rapport convenable.

En effet, R étant le rayon de la roue montée sur l'axe du cylindre, pour un tour de la roue de rayon r' montée sur l'axe de la

vis, l'écrou avance du pas p de cette vis et trace une fraction d'hélice sur le cylindre (puisque le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire sont uniformes). Le pas P de cette hélice sera égal à $\frac{pr'}{R}$, car les pas de l'hélice qui met l'outil en mouvement et de celle tracée sur le cylindre, sont en raison inverse des nombres des tours des deux axes pendant le même temps ou des rayons des deux roues, c'est-à-dire qu'on a : $P : p :: r' : R$, d'où $P = \frac{pr'}{R}$.

On obtiendra donc telle valeur qu'on désirera de P en faisant varier convenablement le rapport $\frac{r'}{R}$.

Remarquons qu'au lieu de faire marcher l'outil et tourner le cylindre, on pourrait faire avancer le cylindre et tourner l'outil. Nous verrons l'application de ces dispositions aux machines-outils, livre IV.

Presque tout l'art du tour repose sur les considérations précédentes. Il est évident qu'en resserrant suffisamment le pas des spirales et des hélices ou en employant des outils suffisamment larges, ces systèmes fournissent le moyen d'obtenir à l'aide du tour des surfaces plates, des cylindres, des cônes, etc.

439. II. C'est encore dans l'art du tour que la seconde solution, qui permet le tracé de courbes de formes accidentées, trouve son application, dans un genre de tour dit tour à guillocher, qui sert à tracer des ornements sur des surfaces à l'aide d'une courbe directrice. En se reportant à la fig. 355, la courbe directrice sur laquelle s'appuie le point O est appelée *rosette*, la règle OT qui porte l'outil en T se nomme la *touche*.

En traitant des outils, nous entrerons dans quelques détails sur la manière d'établir la relation entre la courbe directrice du mouvement rectiligne alternatif et l'outil. La seule chose dont nous ayons à nous occuper ici est la question géométrique, qu'on peut énoncer ainsi : *trouver une rosette pour une courbe donnée.*

440. Ce problème est facilement résolu par un tracé. En effet, soit AB la courbe à reproduire (fig. 357), et CT, CT'... des rayons vecteurs. On connaît l'inclinaison CTO de la touche sur chaque

rayon vecteur et la longueur O T. Prenant un point quelconque T′ sur un de ces rayons, nous pourrons tracer T′ O′, menant par O′ une parallèle à C T′, le point O″ de la courbe sera le point qui devra être tracé par la touche, le point T′ étant en T″, point de rencontre avec C T′ de la ligne O″ T″ parallèle à O′ T′. La suite des points ainsi déterminés donnera le tracé de la rosette.

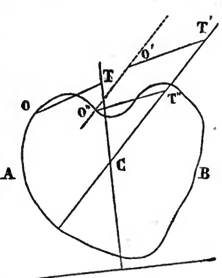


Fig. 357.

441. MM. Lantz et Bétancourt ont décrit un petit instrument fort simple inventé par La Condamine pour tracer avec facilité une rosette correspondant à une courbe donnée, et permettre par une opération simple de déterminer les rosettes qui correspondent à divers points pris pour centres des rayons vecteurs, afin d'adopter le tracé qui fournit la rosette la moins anguleuse, celle qui convient le mieux, par suite, pour le travail du tour.

A B C D (fig. 358) est une règle percée d'une rainure dans toute sa

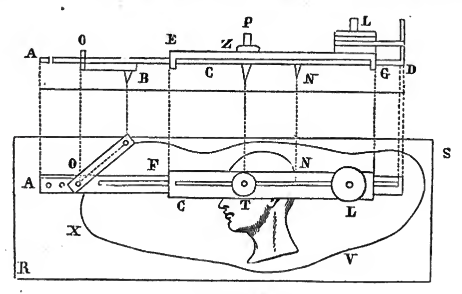


Fig. 358.

longueur; sur la partie A B s'assemble une pointe, si l'on veut obtenir seulement la conchoïde de la courbe cherchée, une barre O B dans le cas que nous traitons ici. La règle A B C D est embrassée par les tenons E et G d'une seconde règle, percée aussi d'une rainure, et pouvant glisser sur la première; un barillet L monté sur la

règle EG et portant une corde attachée à l'extrémité de la première règle tend à produire cet effet. Une pointe N, faisant corps avec ABCD, tendra donc à se rapprocher du centre P formé par une troisième pointe assemblée avec la deuxième règle.

Soit T le contour d'une tête, par exemple (et il est curieux de voir que La Condamine semblait se poser, en 1730, le problème résolu de nos jours par l'invention du tour à portrait), pour lequel on cherche la rosette la plus convenable. Après avoir découpé ce profil sur une carte, on le colle sur une autre RS. Ensuite on prend à volonté un point P pour centre; on perce les deux cartes en ce point, et on les attache sur un plan en y enfonçant la pointe P; après quoi, on applique la pointe N sur le contour du relief de la tête découpée; on tourne ensuite à la main tout le système, en faisant toujours porter la pointe N sur le bord de la découpure; ou mieux encore, on ne fait que tourner d'une main la carte sur son centre en tenant de l'autre la machine fixe, et en faisant attention à ce que la pointe N ne quitte pas le bord de la carte découpée, action que facilite l'effet du ressort renfermé dans le barillet.

442. *Observations sur le tracé des courbes.* Ce qui précède répond aux divers cas de la pratique, en permettant d'obtenir dans tous les cas un mouvement d'après une courbe voulue, ou, ce qui revient au même, de tracer une courbe voulue. Ce tracé n'est possible généralement, qu'à l'aide d'une autre courbe déterminée d'après la nature de la première.

Dans quelques cas la construction générale se simplifie, en ce sens qu'on peut se dispenser du tracé d'une rosette en profitant d'une propriété particulière de la courbe à obtenir. Pour que ce tracé résulte d'une construction simple, il faut évidemment que cette propriété résulte de relations simples entre certaines lignes qui se rattachent à la courbe, et par suite, qu'en général les relations entre les coordonnées de la courbe soient simples elles-mêmes. C'est ainsi qu'il ne peut y avoir de constructions à l'aide de mouvements rectilignes ou circulaires que pour les courbes du second degré, que celles-ci sont les seules qui puissent se tracer à l'aide de la règle et du compas.

Pour faire sentir comment les courbes dont l'équation est d'un degré plus élevé que le second ne peuvent, quand on déduit de leurs propriétés un moyen relativement simple de les tracer, être obtenues par une combinaison simple de mouvements rectilignes et circulaires (avec la règle et le compas), nous citerons une courbe du quatrième degré, la lemniscate qui, à cause de curieuses propriétés, a été étudiée avec soin par les géomètres. Cette courbe, dont l'équation est de la forme $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$, jouit de cette propriété que le produit des deux rayons vecteurs menés de ses deux foyers à un même point de la courbe est constant; relation simple, mais d'un ordre élevé en raison du degré de l'équation.

443. Il existe notamment pour les courbes de second degré des constructions spéciales que nous nous contenterons d'énoncer, sans en donner une démonstration qui appartient à tous les traités de géométrie analytique.

Ellipse. A et B foyers de l'ellipse (fig. 359), sont deux points tels que si on mène deux droites AC, BC de ces points à un point quelconque de la courbe, la somme $AC+BC=$ constante. Si donc on prend un fil de longueur égale à cette somme, qu'on en attache les extrémités à deux pointes fixées aux foyers et qu'on tende le fil, à l'aide d'un style, tout point marqué par le style ainsi guidé appartiendra à l'ellipse, qui sera ainsi tracée d'un mouvement continu.

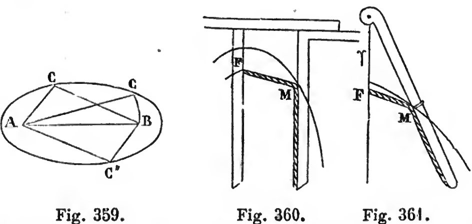


Fig. 359. Fig. 360. Fig. 361.

Hyperbole. F étant un foyer de l'hyperbole (fig. 361) auquel est fixée l'extrémité d'un fil; si on appuie ce fil contre un rayon d'un cercle dont le centre soit sur l'axe des y, un style tendant

toujours le fil tandis que le rayon s'éloigne de l'axe trace l'hyperbole.

Parabole. Un fil étant de même attaché au foyer F (fig. 360), si on le tend contre le côté d'une équerre se mouvant le long d'une ligne parallèle à l'axe des n, le style placé à la rencontre du fil et de la branche de l'équerre tracera une parabole.

On voit que grâce à la flexibilité des fils, les propriétés des sections coniques fournissent un moyen de les tracer par des combinaisons assez simples.

444. Parmi les mouvements qui peuvent servir à tracer les courbes, nous citerons encore la construction suivante de l'ellipse, reposant sur le mouvement d'une droite sur deux autres droites, par le genre de mouvement complexe de la ligne AB dans la disposition de la figure 333. Si cette droite AB porte deux saillies (fig. 362) glissant dans deux rainures pratiquées dans deux droites ox, oy, un point quelconque de cette droite, tracera une ellipse.

Le théorème est encore vrai quand le point C est extérieur à la droite, et forme avec les points A et B un triangle ABC de forme invariable.

Dans ces constructions le mouvement est dirigé en chaque instant par deux guides rectilignes ; ces systèmes appartiennent donc à une nature de mouvement complexe.

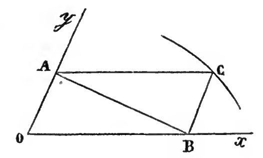


Fig. 362.

445. *Développantes.* La flexibilité des fils fournit le moyen de tracer par le simple mouvement circulaire d'un fil toujours tendu et préalablement enroulé autour d'une courbe, la développante de cette courbe. Ayant donc la développée on pourra toujours obtenir la développante, la première courbe servira en quelque sorte de rosette pour obtenir la seconde dans ce mode particulier de génération.

MOUVEMENT D'APRÈS UNE COURBE EN MOUVEMENT RECTILIGNE OU CIRCULAIRE.

446. Le problème inverse de celui dont nous venons d'indiquer les solutions, c'est-à-dire la transformation du mouvement d'après une courbe donnée en mouvement rectiligne ou circulaire ne se présente pour ainsi dire jamais dans les machines, dans lesquelles on évite ce genre de mouvement, à cause des résistances qui l'accompagnent nécessairement. En effet, il ne suffit plus ici, comme dans le mouvement circulaire, d'assujettir des axes dans des coussinets; il faut, comme nous l'avons vu, faire mener la pièce qui doit se mouvoir suivant une courbe par une cheville assujettie dans une rainure ayant la forme de la courbe donnée. C'est assez dire combien il en résulte de résistances de toute nature, aussi jamais on ne donne semblable mouvement aux organes de communication; il n'est employé quelquefois que pour les opérateurs, c'est-à-dire pour les derniers organes.

Sans donc nous arrêter à cette question, nous ferons comprendre comment il est théoriquement possible de transformer le mouvement suivant une courbe en un mouvement circulaire. Soit A un point décrivant la courbe AD (fig. 363), une cheville, par exemple,

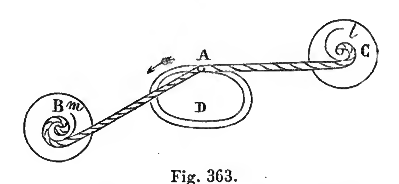


Fig. 363.

forcée de se mouvoir dans une rainure ayant la forme de cette courbe. Si l'on suppose qu'une corde attachée à cette cheville vient à s'enrouler sur une spirale en forme de *fusée* C, l'axe de celle-ci prendra, par le mouvement de la cheville dans le sens de la flèche, un mouvement circulaire, et il sera toujours possible de donner à cette spirale une forme telle que l'arc enroulé dans l'unité de temps

soit d'un même nombre de degrés et par suite d'obtenir un mouvement circulaire uniforme, quelles que soient la forme de la courbe et la vitesse de la cheville A dans cette courbe.

Lorsque la direction du mouvement change, le système ne donne plus de mouvement circulaire en C, mais il pourra agir sur une fusée B placée de l'autre côté de la courbe; de même pour tous les changements de direction. Il est d'ailleurs facile, à l'aide de ces mouvements circulaires intermittents, mais dont un a toujours lieu, de faire mouvoir régulièrement une poulie à l'aide de courroies (droites ou croisées pour que l'action ait toujours lieu dans le même sens), en faisant en sorte que la communication s'interrompe et reprenne à un moment convenable par un des systèmes d'embrayages que nous expliquerons plus loin, par exemple, à l'aide de rouleaux de tension dont l'action dépendrait de la position de la cheville motrice. Des ressorts doivent toujours tendre à enrouler la corde. On voit à quelle complication on arrive pour réaliser une solution imparfaite du problème; nous avons voulu montrer seulement qu'elle n'était pas impossible.

MOUVEMENT SUIVANT UNE COURBE DÉTERMINÉE EN MOUVEMENT SUIVANT UNE AUTRE COURBE ÉGALEMENT DÉTERMINÉE.

447. Les solutions qui précèdent et dans lesquelles en général une courbe quelconque est obtenue à l'aide d'un mouvement rectiligne de vitesse variable déterminée par une autre courbe, fournissent la solution du problème, dans le cas particulier où les deux courbes ont entre elles les relations convenables à cette reproduction, l'une étant donnée de construire l'autre. Quand ces deux courbes sont quelconques, on pourrait, si la réciproque indiquée dans l'article précédent était possible, transformer le mouvement suivant la première courbe en des mouvements circulaires ou rectilignes, puis ceux-ci en mouvement suivant la seconde courbe. Pratiquement on ne saurait adopter une semblable solution.

Comme nous l'avons dit, le mouvement d'après une courbe ne sert dans les machines que pour donner à l'outil des mouvements nécessités par la nature du travail et ne peut être employé pour des communications de mouvement. Ce n'est donc que pour l'opé-

rateur que le mouvement suivant une courbe est nécessaire, et la machine est terminée à cette dernière transformation.

448. *Pantographe.* Il est un seul cas où le mouvement doit passer nécessairement d'une courbe à une autre courbe, et qui est d'un usage fréquent dans les arts graphiques, c'est le cas où il s'agit d'obtenir une courbe semblable à une autre courbe, c'est-à-dire deux courbes telles que tous les rayons vecteurs qui leur sont menés d'un même centre soient dans un rapport constant, et les éléments de ces courbes semblables et semblablement placés.

L'instrument dont on se sert dans ce cas, et avec lequel les conditions établies ci-dessus sont satisfaites, est le pantographe (fig. 364). Il se compose de deux règles articulées en un point A. Aux points B et C sont articulées deux autres règles telles que AB = AC = BD = CD. Quel que soit l'angle en A, ces quatre lignes formeront un losange. I étant le pivot autour duquel tourne le système, F un traçoir assujetti à suivre les contours du dessin; le point E en lequel sera placé un crayon, tracera des figures semblables à la première; ce qu'on démontre facilement. En effet, quelle que soit la position des branches, on aura toujours, en tirant la ligne FI, à cause de la similitude évidente des deux triangles EAI, FCI, EI : FI :: AC : CI :: AE : CF, la position du point E sera donc toujours la même sur la branche AB, et le rapport de droites menées du point I restera constant puisque les termes AC, CI sont constants, donc tous les éléments des courbes seront semblables et par suite celles-ci.

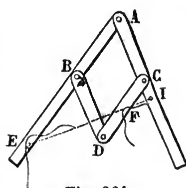


Fig. 364.

Si le point I se confondait avec le point C, EI serait dirigé suivant CD, et le point E devrait être sur cette ligne.

449. Nous avons supposé, dans ce qui précède, les courbes tracées sur un plan, mais on peut de même obtenir les courbes successives d'une surface, obtenir une surface semblable à une surface donnée. C'est ce qu'a réalisé M. Collas dans l'ingénieuse machine avec laquelle il réduit les statues.

La fig. 365 en représente un croquis. Soit AD une barre en

bois, dans laquelle sont pratiquées des rainures longitudinales dans lesquelles peuvent glisser dans l'une une touche, dans l'autre un outil. L'extrémité A de cette barre est terminée par un joint universel, qui lui permet de prendre toute direction. De cette extré-

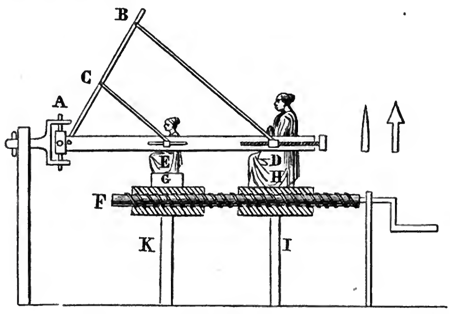


Fig. 365.

mité part une bielle articulée BC, qui en porte deux autres articulées également, attachées l'une à la touche et l'autre au burin, et de longueur telle que l'on ait AC : AB : : CE : BD, que les triangles ACE, ABE soient toujours semblables.

Il en résulte que si l'on fait glisser le coulisseau de la touche sur la barre d'une petite quantité (ce que l'on fait à l'aide d'une vis pour obtenir de petits mouvements) le coulisseau du burin glisse aussi et dans le même sens; et la touche et le burin traceront une succession de courbes toujours semblables et semblablement placées.

Il sera facile d'après cela d'obtenir la réduction d'une surface quelconque. En effet, plaçons devant la touche D un modèle H, supporté par un plateau garni d'une roue dentée; et devant l'outil E une masse molle placée sur un plateau garni d'une roue dentée égale à la première; ces roues dentées étant conduites par une même vis qui leur fait faire en même temps des rotations égales autour de leur axe, il est clair que si ces plateaux sont disposés de telle sorte que l'outil et la touche soient placés de manière à correspondre à deux circonférences dont les diamètres

sont dans les rapports AC à AB, dans un tour complet des plateaux il sera possible à l'aide de ce système, de tracer sur les deux surfaces une infinité de courbes semblables, dans les plans méridiens du modèle et de la réduction; et en répétant l'opération dans une infinité de plans, en faisant tourner les plateaux à l'aide de la vis, d'obtenir la réduction de la surface modèle.

La réduction est non seulement exacte théoriquement dans ce système, mais dans la pratique, comme cette réduction résulte de celle des lignes de grande courbure tracées directement par l'outil, M. Colas obtient les plus beaux résultats, parce que ce sont ces lignes qui représentent le mieux la surface, et que c'est leur perfection qui donne surtout à une statue sa valeur artistique.

COMBINAISON DE VITESSES.

450. Lorsque divers organes sont mis en communication pour constituer l'ensemble que nous appelons une machine, une partie fixe que l'on nomme le bâti porte les coussinets qui maintiennent les axes du mouvement circulaire et les guides du mouvement rectiligne. Si l'on donne à tout l'ensemble qui constitue la machine une certaine vitesse, rien ne sera changé dans les mouvements relatifs des diverses pièces, et un point décrivant arrivera en un même point de la courbe qu'il trace, soit par le mouvement combiné, soit par la succession des deux mouvements simples, comme nous l'avons vu pour le tracé des courbes lorsque l'on fait tourner une barre douée d'un mouvement rectiligne.

Si l'on imprime par une action extérieure un mouvement à une partie seulement d'une machine, en général la communication cessera entre cette partie de la machine et les autres. Il ne peut en être autrement, il ne peut y avoir ce que nous appelons des vitesses combinées résultant de deux vitesses, qu'autant que les mouvements que prennent les guides des pièces sont tels que celles-ci continuent à agir l'une sur l'autre comme pour les cas étudiés jusqu'ici, où nous avons considéré les axes et les guides comme fixes de leur nature. Ce dernier cas n'est donc qu'un cas particulier d'un problème plus général, celui où la vitesse des guides des pièces se réduit à zéro. C'est ce que nous allons rendre clair par un exemple.

Lorsqu'un organe de communication de mouvement, une vis par exemple, se meut, la vitesse du mouvement de rotation de la tête de la vis est à son mouvement rectiligne dans le rapport du rayon du filet au pas de la vis.

Mais ceci suppose que l'écrou est fixe, ce qui n'est qu'un cas particulier du mouvement, celui qui correspond à la vitesse zéro; si, au contraire, il pouvait se mouvoir comme la vis, la vitesse de celle-ci serait évidemment modifiée; si, par exemple, il tournait en même temps que la vis avec une vitesse de rotation variant de zéro

à celle de la vis, la translation rectiligne de celle-ci dans le même temps varierait de la longueur du pas à zéro.

On voit que dans une disposition semblable la vitesse absolue d'un organe change suivant la vitesse des guides du mouvement.

Les mouvements produits dans les systèmes qui réalisent ce genre de disposition sont généralement appelés *mouvements différentiels*, parce que la vitesse absolue est une combinaison de deux vitesses comme dans l'exemple donné plus haut, et que ce n'est que par un mouvement de même nature que celui de l'organe que les guides peuvent modifier la vitesse de celui-ci; celle-ci n'est plus alors la vitesse simple de l'organe tel que nous l'avons etudié, mais le résultat de deux vitesses. Nous voyons que l'étude de ces systèmes revient à la solution de ce problème dont les transformations étudiées précédemment forment un cas particulier :

Déterminer le rapport de vitesse dans un organe de transformation lorsque le guide de l'organe prend un mouvement de même nature que celui de cet organe, d'où résulte avance ou retard du mouvement, combinaison de vitesses.

Le problème ainsi nettement posé va nous permettre de réunir dans une même étude des systèmes dont l'analogie n'a jamais été clairement indiquée; qui permettent d'obtenir très simplement certains mouvements qu'il serait impossible de produire par des combinaisons d'organes à guides fixes; qui enfin fournissent la solution du problème de faire des sommes ou des différences de vitesses.

Passons en revue les diverses transformations du mouvement et les organes qui servent à les produire, c'est-à-dire les plans inclinés ou courroies, les roues ou tours et les leviers.

I. MOUVEMENT RECTILIGNE EN MOUVEMENT RECTILIGNE.

451. *Plans inclinés.* Nous avons vu comment à l'aide de deux plans inclinés on pouvait transmettre le mouvement rectiligne de la barre A B à la barre C D. Pour cela le plan incliné P étant fixé à la barre A B (fig. 366), le plan incliné P', qui repose sur le premier, est assujetti à ne pouvoir que s'élever dans la direction de CD. Mais si on lui donne la faculté de se mouvoir aussi dans la

direction de AB (qui est celle des guides de cette pièce), qu'il ait un mouvement propre parallèle à AB, il est clair que le mouvement de CD résultera de la somme ou de la différence des mouvements

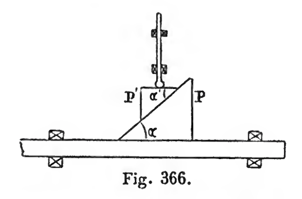


Fig. 366.

des deux plans inclinés suivant qu'ils iront l'un vers l'autre ou s'éloigneront, et qu'on aura pour le chemin parcouru par CD :

$$E = e \text{ tang. } \alpha \pm e' \text{ tang. } \alpha'.$$

si $\alpha = \alpha'$, $e = e'$, la vitesse est 0 ou $2e$ tang. α.

La somme algébrique des mouvements rectilignes, évalués suivant la même direction, s'obtenant toujours avec une grande simplicité, il n'y a pas à insister sur les systèmes de ce genre.

452. *Poulies.* Lorsque le mouvement rectiligne est produit à l'aide de poulies, si l'on donne à la barre Bb (fig. 367), qui porte l'axe de la poulie, un mouvement de translation parallèlement à la direction de la corde, si a est la vitesse de la corde, b celle de l'axe de la poulie, la vitesse absolue de l'un des brins sera $a - b$, celle de l'autre $a + b$ puisqu'ils marchent en sens contraire l'un de l'autre.

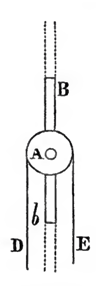


Fig. 367.

Si la corde était fixée à une de ses extrémités, le mouvement communiqué à l'autre brin serait double de celui de la poulie, comme nous l'avons vu pour la poulie mobile.

453. Lorsqu'un des mouvements rectilignes est alternatif, cette propriété pourra servir à obtenir des mouvements complexes avec une grande simplicité. Par exemple, soit à faire mouvoir une pièce d'un mouvement rectiligne alternatif tel que le mouvement en

avant soit toujours plus grand que celui en arrière, de telle sorte qu'elle avance ainsi graduellement d'une extrémité à l'autre d'une ligne droite. Ce mouvement sera évidemment obtenu avec la plus grande simplicité par l'addition des vitesses de deux systèmes, l'un possédant un mouvement rectiligne alternatif, l'autre un mouvement rectiligne continu.

454. Réalisons en partie une pareille disposition. Soit C (fig. 368), un axe de rotation auquel est adapté un petit cylindre autour duquel la corde *e* s'enroule, et qui porte en outre un disque, sur lequel est fixée excentriquement une cheville *c* qui, par le moyen de la bielle *cb*, communique un mouvement alternatif au levier A*a* dont le centre est en A. L'extrémité du levier porte une poulie D, et la corde qui s'enroule autour du petit cylindre passe sur cette poulie et va se réunir à un poids ou une pièce E assujettie à se mouvoir suivant E*f*.

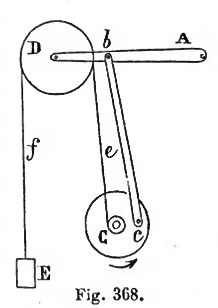


Fig. 368.

Quand C tourne, le centre *a* de la poulie D oscille et décrit un petit arc qui se confond sensiblement avec une parallèle à *f*E, et en vertu de ce mouvement de l'axe de la poulie mobile, le brin et le poids E reçoivent un mouvement alternatif d'étendue double de celui de l'axe de la poulie (le brin *e* ne pouvant y participer). Simultanément le brin *e*, qui s'enroule lentement sur le cylindre, communique à E un mouvement continu de bas en haut. Par suite E recevant ces deux mouvements en même temps, se meut verticalement d'un mouvement alternatif de moindre étendue en descendant qu'en montant.

455. *Poulies mobiles.* En y réfléchissant, on voit facilement que si la poulie mobile est soumise aux lois du mouvement différentiel, c'est-à-dire si la vitesse d'un brin est double de celle de l'axe de la poulie, lorsque les chemins sont parallèles, c'est qu'en réalité elle est un organe du genre différentiel dans lequel le mouvement rectiligne de déplacement de l'axe de rotation de la poulie s'ajoute au mouvement rectiligne de la corde qui le produit. La poulie

étant supportée par la corde qui entoure sa circonférence, son axe peut prendre un mouvement de progression d'où naissent les propriétés des moufles.

II. MOUVEMENT CIRCULAIRE EN MOUVEMENT RECTILIGNE.

Les organes qui servent à cette transformation peuvent fournir deux systèmes différentiels, suivant qu'on considère le mouvement circulaire ou le rectiligne, et qu'on laisse prendre au guide de l'un des éléments le mouvement de l'autre.

PREMIER CAS. — GUIDES A MOUVEMENT RECTILIGNE.

1° *Du mouvement circulaire.*

456. Le moyen d'astreindre l'axe du mouvement circulaire à se mouvoir en ligne droite consiste à le rendre solidaire d'une pièce glissant dans des guides rectilignes, de faire par exemple porter les coussinets par une pièce qui glisse sur une barre rectangulaire. Disons en passant que cette combinaison d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement circulaire, fournit un instrument simple propre à tracer le cycloïde, si un point du cercle est muni d'un traçoir, et que l'axe du cercle soit porté par un petit bâti dans lequel est pratiquée une douille qui glisse sur une règle.

Si la roue dont l'axe est ainsi mis en mouvement, est munie de dents qui engrènent avec une crémaillère (fig. 369) dont la direction est parallèle à la ligne que décrit le centre de la roue, on aura un mouvement différentiel, et le mouvement C de la crémaillère, pour un tour de la roue et un déplacement l de son axe, sera :

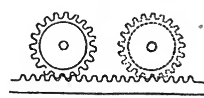


Fig. 369.

$$C = 2\pi r \pm l.$$

457. *Vis différentielle.* Si l'axe de la roue est à angle droit avec la direction du mouvement rectiligne, la vis fournira un système différentiel en faisant prendre un mouvement rectiligne parallèle à l'axe, aux collets de la vis que l'on suppose fixes dans la disposition ordinaire. Le moyen le plus naturel d'obtenir ce résultat consiste à fileter les collets de la vis et à transformer en écrou les coussinets qui les reçoivent, ce qui fournit le système inventé par M. Prony,

et auquel il a donné le nom de vis différentielle (fig. 370). Il consiste dans un arbre portant deux pas de vis ; ceux-ci traversent deux supports formant écrous, et par suite l'axe avance d'un pas par chaque tour de manivelle ; si le milieu de l'axe est formé d'une vis d'un pas différent du précédent, et porte un écrou qu'un guide empêche de tourner, celui-ci montera par chaque tour d'une quantité égale au pas de la vis. Son mouvement absolu, égal au transport de l'axe moins son mouvement propre, sera donc égal à la différence des deux pas de vis $(h—h')$, quantité qu'on peut obtenir aussi petite qu'on le voudra, en conservant au filet de la vis toute la solidité nécessaire.

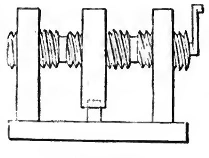


Fig. 370.

Si les inclinaisons des deux filets au lieu d'être de même sens, étaient de sens contraire, les mouvements au lieu de se retrancher l'un de l'autre s'ajouteraient.

2° *Du mouvement rectiligne.*

458. *Treuil différentiel.* On appelle ainsi un treuil tel que le mouvement rectiligne de la résistance à surmonter s'y trouve la différence de deux mouvements rectilignes.

Considérons un treuil employé à soulever un fardeau, la corde est guidée en ligne droite par la pesanteur lors de son enroulement autour du cylindre. Si le poids est suspendu à une poulie mobile soutenue par une corde pliée en deux parties, dont les extrémités s'enroulent dans deux sens opposés sur le cylindre du treuil (fig. 371), et que ce cylindre soit formé de deux cylindres de diamètres différents, on aura le treuil différentiel. Le fardeau n'est plus alors soulevé pour chaque tour que de la moitié de la différence des deux chemins parcourus par la corde sur les deux cylindres, et on a par tour $e = 2\pi\left(\frac{R - r'}{2}\right) = \pi(R - r)$.

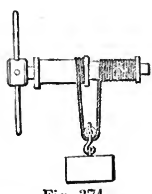


Fig. 371.

459. Malgré ses avantages apparents, ce système n'est pas employé dans la pratique parce que la résistance passive qui existe dans le treuil, par l'effet de la roideur des cordes, y est considérablement augmentée.

En effet, pour chaque tour du treuil différentiel, la longueur de la corde enroulée (tant pendant ce tour qu'antérieurement pour qu'il puisse fonctionner) est $2\pi R + 2\pi r$. Le fardeau est élevé pour ce tour de $2\pi \frac{R-r}{2} = \pi(R-r)$, quantité égale à la longueur de corde qui serait enroulée sur un treuil ordinaire pour une même élévation du fardeau. Donc on a :

$$\frac{\text{Longueur de corde sur le treuil différentiel}}{\text{Longueur de corde sur le treuil ordinaire}} = 2\,\frac{R+r}{R-r},$$

$R - r$ étant très petit par hypothèse, ce rapport est donc très grand, et le travail perdu par la roideur de la corde beaucoup plus considérable que dans le treuil ordinaire.

Deuxième cas. — Guides a mouvement circulaire.

460. Considérons maintenant le cas où l'on donne un mouvement circulaire à la pièce mue d'un mouvement rectiligne.

Soit d'abord le cas d'une crémaillère. Si on fait tourner celle-ci autour de l'axe de rotation de la roue en montant ses guides sur un disque tournant autour de cet axe, on voit :

1° Que si le disque a la même vitesse angulaire que la roue, la crémaillère n'aura qu'un mouvement de rotation ;

2° Que si cette vitesse angulaire est différente, la crémaillère aura en même temps un mouvement de rotation et un de progression, ce dernier étant pour deux angles ω, ω' parcourus en un même temps $r(\omega' - \omega)$. Si $\omega' = 2\omega$, rapport bien facile à établir par deux engrenages moteurs, cette progression sera $r\omega$, et, en roulant sur la circonférence, la crémaillère tracera par un de ses points les développantes du cercle primitif ; dans tous les cas, des développantes allongées ou raccourcies.

461. Soit maintenant le cas de la vis, et supposons que l'écrou ait la liberté de tourner autour du même axe que la vis. Cette disposi-

tion pourra être réalisée en montant sur l'axe moteur deux roues qui engrènent, l'une avec une roue montée sur la tête de la vis, l'autre avec le contour extérieur de l'écrou formant pignon.

Aa est l'axe moteur (fig. 372) sur lequel sont montées les deux

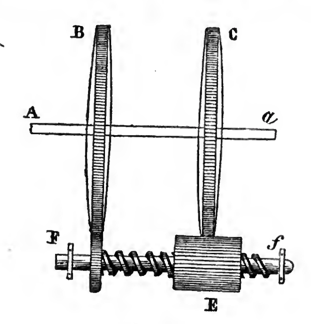


Fig. 372.

roues B et C, Ff est l'axe de la vis tournant sur deux collets; vers sa tête est montée une roue D, et elle porte un pignon E dont l'intérieur est taillé en écrou, qui peut par suite avancer ou reculer en tournant autour de la vis.

Si les roues B, C, D, E étaient égales deux à deux, il est clair que l'écrou et la vis tourneraient ensemble comme s'ils ne faisaient qu'une seule pièce; mais si les rayons sont différents, il en résulte un mouvement relatif, un mouvement différentiel, dont la vitesse résulte de la différence des vitesses des mouvements composants.

En effet, représentons par B, C, D, E, les nombres de dents des roues représentées par les mêmes lettres, et par P le pas de la vis. Les rotations simultanées des axes Aa, Ff et de l'axe de l'écrou étant L, L_v, L_e, on a :

$$L_e = \frac{LC}{E},\ L_v = \frac{LB}{D}.$$

Mais si la vis fait L_v rotations et l'écrou L_e dans le même sens, la vis et l'écrou font $L_v - L_e$ rotations l'un par rapport à l'autre, et par suite le déplacement de l'écrou parallèlement à l'axe de la vis est :

$$(L_v - L_e)\,P = L\,P\left(\frac{B}{D} - \frac{C}{E}\right),$$

quantité qu'on peut rendre très petite par rapport à L.

Cette combinaison est employée dans quelques alésoirs (soit qu'on fasse déplacer la vis, soit que ce soit l'écrou qui se déplace) ; nous verrons plus loin une application que M. Poncelet en a fait à un dynamomètre.

III. MOUVEMENT CIRCULAIRE EN MOUVEMENT CIRCULAIRE.

462. Le mouvement différentiel existera dans un système de roues ou de pièces douées d'un mouvement de rotation, lorsque l'on donnera à l'axe de rotation d'un des systèmes un mouvement de rotation autour de l'autre axe. C'est ce cas que nous allons traiter avec quelques détails, car il offre des résultats remarquables.

Disons d'abord quelques mots du cas où l'on donnerait à l'un des axes de rotation un mouvement rectiligne. Il est clair qu'il n'en résulterait rien de particulier dans le cas des axes parallèles, que bientôt les roues d'engrenage ne seraient plus en prise et que la communication du mouvement cesserait. Mais dans le cas où les axes sont à angle droit, lorsqu'on emploie la vis sans fin, il n'en est pas ainsi.

On sait que lorsqu'on considère une section de ce système par un plan passant par l'axe de la vis, perpendiculairement à l'axe de la roue, il est semblable à celui composé (fig. 373) d'une roue et d'une crémaillère.

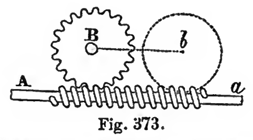


Fig. 373.

Lors donc qu'on fait glisser la vis dans le sens de la longueur de l'axe, sans rotation, elle agit comme une crémaillère. D'autre part, quand elle tourne, elle communique une rotation à la roue. Donc, quand ces deux mouvements seront communiqués par un double mouvement de la vis (ou inversement si la roue se transporte parallèlement à l'axe de la vis pendant que celle-ci tourne), on aura un mouvement différentiel. Par exemple, si la vis a en même temps un

mouvement de rotation uniforme et un petit mouvement de va-et-vient, la roue se mouvra en faisant continuellement un certain mouvement dans un sens et un moindre dans l'autre.

463. Revenons au cas du mouvement de rotation.

Le système qui résulte de la disposition convenable pour le mouvement différentiel, fournit une application curieuse de l'emploi que nous avons déjà fait du système de mouvements combinés pour tracer des courbes.

Ainsi, si un disque tournant autour d'un axe porte l'axe d'un second disque parallèle au premier, par l'effet des rotations de ces deux axes, un point attaché au second disque décrira une épicycloïde dont les proportions dépendront de la grandeur des rayons des mouvements circulaires composants, et aussi de la vitesse et des directions de leurs révolutions. Il est facile de réaliser à l'aide d'engrenages la disposition dont nous parlons, et d'obtenir un système propre à tracer les épicycloïdes. Tel est le petit appareil dit plume géométrique de Suardi, que décrivent MM. Lantz et Bétancourt.

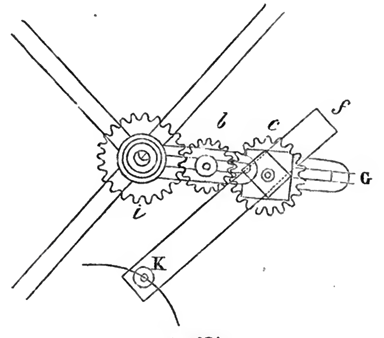


Fig. 374.

464. A un axe D (fig. 374), monté sur trois pieds qui supportent l'instrument, est fixée à demeure une roue *i*; ce même axe porte une barre G pouvant tourner autour de lui, et portant deux roues dentées *b*, *c*, qui engrènent entre elles et avec la première *i*. Il est

évident que si on fait mouvoir la barre G autour de l'axe D, la roue *c* tournera comme si elle roulait sur une circonférence. Un crayon assemblé avec un point de la roue *c* pourra servir à tracer une épicycloïde ; si on adapte ce crayon à l'extrémité d'une barre *f k*, la courbe tracée sera une épicycloïde allongée, dont la forme variera en raison des diamètres des roues dentées, mais ne pourra cesser d'être de la famille des épicycloïdes.

La rotation d'un cercle sur un autre en établissant entre les coordonnées d'un point décrivant certaines relations d'une nature particulière, qui traduites en équation donnent l'équation de l'épicycloïde, ne peut servir, par suite, qu'à tracer la famille des courbes représentées par une équation de même forme, et nullement celles où les relations entre les coordonnées sont d'une nature tout à fait différente.

465. Avant d'abandonner le tracé des courbes qui peuvent être obtenues par un semblable système pour aborder la question plus importante des vitesses, rappelons que comme nous l'avons déjà vu, l'épicycloïde décrite devient une ligne droite lorsque la roue décrivante est d'un diamètre moitié de celui de la roue fixe.

De là résulte une solution particulière de la transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, à l'aide des engrenages circulaires, un moyen de produire une double oscillation de va-et-vient pour un tour de roue. Ce *système dû à Lahire* (fig. 375) consiste à faire mouvoir, dans une grande roue dentée intérieurement, une petite roue dentée d'un diamètre égal à la moitié de celui de la première. Chacun des points de la circonférence de la petite roue décrit un diamètre de la première et peut, par suite, imprimer un mouvement de va-et-vient à une tige qui y est fixée.

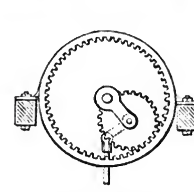


Fig. 375.

Le triangle ABC étant isocèle, on a : AC = 2 cos. BAC (A étant le centre de la grande roue, C étant le point d'attache d'une tige qui se meut verticalement, et B le centre de la petite roue), le rapport de la vitesse de rotation à celle du mouvement rectiligne est donc le même que pour une bielle infinie et une manivelle ordinaire dont le rayon = 2 AB.

Des divers systèmes épicycloïdaux.

466. Nous appellerons trains épicycloïdaux les systèmes dérivant du mouvement de rotation de l'axe d'une roue dentée autour de l'axe d'une autre roue dentée avec lequel la première engrène; c'est le seul mouvement que l'on puisse donner, lorsque les roues sont dans un même plan, pour que l'action d'engrènement continue.

Il y a dans un système épicycloïdal trois parties essentielles à considérer; les deux roues extrêmes, et le levier concentrique à l'une d'elles qui porte l'axe de l'autre; les relations de position différentes de ces trois éléments donnent lieu aux systèmes représentés dans les figures suivantes :

1° Les roues sont extérieures, le plus souvent l'axe de la première (fig. 376) étant fixe, le mouvement est imprimé à l'autre roue extrême B et au levier.

2° L'une des roues est intérieure à l'autre, généralement l'axe de la roue extrême (fig. 377) extérieure est fixe; le mouvement est imprimé au levier qui entraîne la première roue A.

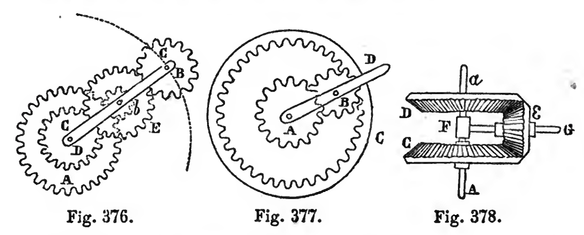


Fig. 376. Fig. 377. Fig. 378.

3° Enfin les deux roues ne sont plus situées dans un même plan, elles sont parallèles et montées sur un même axe, le mouvement de la roue D (fig. 378) montée sur l'arbre Aa, imprimera par l'intermédiaire de la roue E supportée par le levier, un mouvement à la roue C qui tourne librement sur l'axe Aa.

DÉTERMINATION DES RAPPORTS DE VITESSE DANS LES SYSTÈMES ÉPICYCLOÏDAUX.

467. Soit AB un levier tournant autour de A (fig. 379) et condui-

sant un train dont la première roue est A concentrique au levier, et dont la dernière B peut être concentrique ou non concentrique avec A. Ces deux roues sont réunies par un nombre quelconque de roues dentées transportées par le levier AB. Les révolutions d'un point de ces roues doivent être estimées : 1° par rapport à la position initiale du levier, ce qui s'obtient en mesurant la distance angulaire d'un rayon passant par le point décrivant avec la ligne fixe Af, ou si cette roue est excentrique comme B, avec une ligne Bk parallèle à Af; 2° par rapport au levier qui transporte les axes. Le premier arc mesure les révolutions absolues, le second les révolutions relatives ou par rapport avec le levier en mouvement.

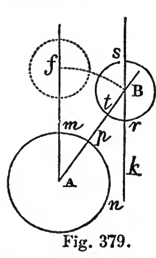


Fig. 379.

Le levier transportant le train de la position Af à AB et pendant ce même temps le point m de la roue A arrivant en n par une action extérieure, le point r de la roue B passe en s en vertu de la connexion de cette roue avec la roue A (nous supposons que ces mouvements ont lieu dans le même sens). mAn, rBs sont les mouvements absolus des points correspondants sur les roues A et B, et pAn, tBs sont leurs mouvements par rapport au levier.

Mais $mAn = mAp + pAn$ et $rBs = rBt + tBs = mAp + tBs$ et mAp est le mouvement du levier.

Si les roues se meuvent dans des directions opposées

$$mAn = pAn - mAp \quad \text{et} \quad rBs = tBs - mAp$$

Relation qui subsiste, quelle que soit la grandeur des angles décrits, et est vraie toutes les fois que les rapports des vitesses angulaires sont constants comme il arrive avec les roues dentées. Ce qui revient à dire que les révolutions absolues des roues d'un système épicycloïdal sont égales à la somme de leurs révolutions par rapport avec le levier et de celles de ce levier lui-même, quand les directions sont de même sens, et égales à la différence de ces deux quantités quand elles sont de sens contraire.

468. Soient a, m, n les révolutions absolues simultanées du levier, de la première et de la dernière roue, et soit ϵ la raison du

train épicycloïdal, c'est-à-dire le quotient du nombre des révolutions relatives de la dernière roue divisé par le nombre de celles de la première. ε est une quantité de la forme $\frac{T_m}{T_1}$, identique à celle trouvée pour un système de roues dentées, car elle se rapporte aux mouvements estimés par rapport au levier.

Puisque les révolutions relatives de la première roue par rapport au levier $= m - a$ et celles de la seconde roue $= n - a$, les mouvements du train considérés par rapport au levier étant les mêmes que ceux d'un système ordinaire de roues dentées, on a :

$$n - a = \varepsilon(m - a) \text{ ou } \varepsilon = \frac{n-a}{m-a} \text{ d'où :}$$

$$a = \frac{m\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} \ (1), \quad n = a + (m-a)\varepsilon \ (2), \quad m = a + \frac{n-a}{\varepsilon} \ (3).$$

Appliquons ces formules à divers cas simples :

1° Si la première roue du train est fixe, comme il arrive le plus souvent, le nombre m de ses révolutions absolues est 0, et on a :

$$a = \frac{n}{1-\varepsilon} \text{ et } n = (1-\varepsilon)a \,;$$

2° Si c'est la dernière roue qui est fixe $n = 0$ et on a :

$$a = \frac{m\varepsilon}{\varepsilon - 1} \text{ et } m = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)a.$$

Enfin 3° quand aucune des roues n'est fixe

$$a = \frac{m\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} = \frac{m\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \frac{n}{1-\varepsilon} \ [4],$$

c'est-à-dire que les révolutions du levier sont égales à la somme des révolutions qu'il fait quand on suppose successivement fixes les roues extrêmes.

Dans ces formules les rotations sont considérées comme étant toutes du même sens ; s'il en est autrement, pour celles de sens opposé le signe de m, n, ou a doit être différent. Nous revenons plus loin sur ces signes.

469. Lorsque ni la première, ni la dernière roue n'étant fixes, le mouvement est communiqué par un même axe moteur, soit aux deux roues extrêmes, ce qui produit un mouvement complexe du

levier, soit à l'une des roues extrêmes et au levier, d'où résulte le mouvement complexe de l'autre roue extrême; on peut évaluer les vitesses en fonction de celle de l'axe moteur.

La fig. 380 est un exemple d'un système de ce genre; *mn* est un

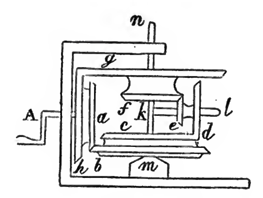


Fig. 380.

axe auquel est fixé le levier *kl* qui transporte les deux roues *d* et *e*, faisant un tout et tournant autour du même levier. Les roues *b* et *c* sont unies de même, et tournent autour de l'axe *mn*, mais ne font pas corps avec cet axe. Pareillement les roues *f* et *g* sont fixées ensemble et tournent autour de *mn*. Les roues *c*, *d*, *e* et *f* constituent un train épicycloïdal dans lequel *c* est la première roue et *f* la dernière.

Si l'axe A imprime le mouvement et porte deux roues *a* et *h*, la première engrenant avec la roue *b* et communiquant le mouvement à la première roue *c* du train épicycloïdal, la roue *h* engrenant avec la roue *g* qui donne le mouvement à la roue *f* qui est la dernière du train; quand cet axe A tourne il communique le mouvement aux deux extrémités du train épicycloïdal, et le levier *kl* reçoit un mouvement combiné que nous allons calculer.

Comme exemple de second cas, supposons dans l'exemple précédent les roues *g* et *f* désunies, *g* étant fixé à l'axe *mn* et *f* tournant librement autour de lui. L'axe A communiquant le mouvement comme précédemment à la première roue *c* du train épicycloïdal par le moyen des roues *a* et *b*, comme d'ailleurs la roue *h* met en mouvement la roue *g*, l'axe *mn* et le levier *kl* se meuvent en même temps, d'où résulte un mouvement composé de la roue libre *f*. Dans cette seconde combinaison, la dernière roue *f*

n'est pas nécessairement concentrique avec le levier comme il est nécessaire dans le premier cas.

470. Cherchons la formule adaptée au premier cas. Soit l'axe menant réuni avec la première roue par un système de roues dentées dont la raison soit μ, et avec la dernière par un système dont la raison soit ν, et soient p les rotations de cet axe moteur, celles simultanées des deux roues seront $m = \mu p$, $n = \nu p$, et la valeur (4) de a donne :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon}.$$

La première partie de cette formule donne la vitesse due à l'action du train μ, la seconde à celle du train ν.

En effet si l'on suppose le train μ enlevé, alors la première roue du train épicycloïdal reste fixe et $m = \mu p = 0$, d'où

$$\frac{a}{p} = \frac{\nu}{1 - \varepsilon},$$

et de même si le train ν était enlevé :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}},$$

c'est-à-dire que le levier se meut avec la somme ou la différence des vitesses produites par chaque action lorsqu'elles deviennent simultanées.

471. Pour le second cas, l'axe menant étant réuni avec la première roue du train épicycloïdal par un train dont la raison est μ, et avec le levier par un train dont la raison est α,

$m = \mu p$ et $a = \alpha p$, la formule (2) donne :

$$n = \alpha p(1 - \varepsilon) + \mu p \varepsilon \text{ et } \frac{n}{p} = \alpha(1 - \varepsilon) + \mu\varepsilon.$$

Les révolutions de la dernière roue du train épicycloïdal sont la somme de celles dues au train α qui produit le mouvement du levier, et de celles dues au train μ qui produit le mouvement de la première roue du train épicycloïdal.

472. Toute la difficulté dans l'application de ces formules consiste

dans le choix du signe que l'on doit donner à la raison des trains.

Un sens de rotation étant pris comme positif, le sens opposé devra être considéré comme négatif, et par suite si les roues extrêmes tournent dans le même sens, toutes deux à droite ou toutes deux à gauche, le rapport est positif; il est négatif s'ils sont de sens opposés. Les rotations du train μ, ν, sont *absolues*, et celles ε *relatives* au levier. Pour déterminer le signe de ε il faut supposer un instant le levier fixe, et par l'analyse du système, déterminer si les rotations des roues extrêmes sont de même sens ou de sens opposé.

On déterminera de même les signes de μ et ν en les considérant séparément : si les mouvements des roues sont de même sens, μ et ν ont le même signe, les signes seront différents si les mouvements sont de sens opposés. Dans les formules ci-dessus, les quantités sont supposées positives; les signes resteront positifs dans tout cas particulier où les mouvements sont semblables à ceux des exemples qui ont donné ces formules et négatifs pour des sens contraires.

473. Soit, pour application des formules précédentes, les trains épicycloïdaux représentés dans les fig. 376, 377 et 378, et supposons que les lettres qui désignent les roues représentent les nombres de dents.

Le train formé des roues A, B, C, dans la fig. 377, est tel de sa nature que les roues A et C tournent en sens opposé, par suite ε est négatif; de même dans le système de la fig. 378; mais dans celui de la fig. 376, les roues extrêmes tournent dans le même sens, et par suite ε est positif. D'ailleurs, on a pour le système de la fig. 376 :

$\varepsilon = + \frac{AE}{bB}$; dans la fig. 377, $\varepsilon = - \frac{A}{C}$, et fig. 378, $\varepsilon = - \frac{C}{D} = -1$.

Lorsque la première roue des trains est fixe, c'est-à-dire lorsque $m = 0$, on a, d'après la formule (2) :

Pour le système fig. 376, $n = \left(1 - \frac{AE}{bB}\right) a$,

$$\text{Pour } 377,\ n = \left(1 + \frac{A}{C}\right) a,$$

$$\text{Pour } 378,\ n = 2a,$$

n et a étant respectivement les rotations simultanées de la dernière roue et du levier.

474. Pour le système de la fig. 380, dans le premier cas, $\varepsilon = \frac{ce}{df}$, et comme le levier étant supposé fixe c et f tournent dans des directions opposées, ε est négatif; $\mu = \frac{a}{b}$ et $\nu = \frac{h}{g}$, et comme d'ailleurs g et b tournent dans des directions opposées, μ et ν doivent avoir des signes différents. La formule trouvée devient :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{1 + \varepsilon} = \frac{\frac{ace}{bdf} - \frac{h}{g}}{1 + \frac{ce}{df}} = \frac{aceg - hbdf}{bg\,(df + ce)}.$$

Pour le second cas, ε est négatif,

$$\mu = \frac{a}{b},\ \alpha = \frac{h}{g},$$

et les signes de μ et ν sont différents; l'on a :

$$\frac{n}{p} = \alpha\,(1 + \varepsilon) - \mu\varepsilon = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{ce}{df}\right) + \frac{ace}{bdf}.$$

475. Les trains épicycloïdaux ont de curieuses applications; nous allons en donner les exemples les plus remarquables. On les emploie :

1° Pour des mécanismes dont la production du mouvement épicycloïdal est le but, comme la plume géométrique déjà décrite pour le tracé des épicycloïdes, ou dans des systèmes qui offrent la même disposition que dans le cas que nous venons de rappeler.

2° Pour établir un rapport de vitesse déterminé avec une grande exactitude entre deux axes de position fixe, lorsque ce rapport est composé de termes qu'on ne peut faire entrer dans un train de roues dentées à axe fixe.

3° Pour produire un mouvement différentiel, une accélération ou retard d'un mouvement de rotation.

4° Pour concentrer l'effet de deux ou plusieurs pièces différentes et indépendantes sur une même roue, quand l'action d'une ou plusieurs de ces pièces est variable.

476. Le levier ou barre qui porte les axes reçoit diverses formes. En général, la partie qui se meut doit être aussi légère que possible, et comporter un petit nombre de roues surtout quand la révolution se fait dans le plan vertical, parce qu'à cause de l'excentricité le poids est une cause de dérangement, à moins qu'il ne soit exactement équilibré. En général, quand le train excentrique est nécessairement lourd, on en dispose les axes verticalement.

PREMIER SYSTÈME DE TRAINS ÉPICYCLOIDAUX.

477. *Premier exemple.* — *Paradoxe de Fergusson.* Soit une roue A de vingt dents fixée à un axe reposant sur le bâti qui supporte l'appareil (fig. 381). Un levier C D tourne autour de cet axe et

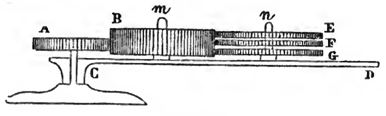


Fig. 381.

porte deux chevilles m et n qui lui sont fixées. L'une d'elles sert d'axe à la roue B d'un nombre quelconque de dents qui engrène avec la roue A et aussi avec des roues E, F, G, qui tournent toutes trois autour de l'axe n.

Quand le levier C D tourne, il communique le mouvement à ces trois roues, qui avec les roues A et B forment trois trains épicycloïdaux.

Les roues extrêmes de chaque train tournant dans le même sens, ε est positif; la formule applicable à ce cas est $\frac{n}{a} = 1 - \varepsilon$, n et a étant les rotations simultanées et absolues de la roue et du levier.

Si $\varepsilon = 1$, $\frac{n}{a} = 0$, et la dernière roue du train n'a pas de rotation absolue. Si ε est plus grand que l'unité, la dernière roue tourne dans la même direction que le levier. Mais si ε est plus grand que

l'unité, $\frac{n}{a}$ est négatif, et les rotations absolues du levier et de la roue sont de directions opposées.

Soient E, F, G, respectivement de 21, 20 et 19 dents ; dans le train supérieur, $\varepsilon = \frac{A}{E} = \frac{20}{21}$ est plus petit que l'unité, la roue tourne dans le même sens que le levier.

Dans le train du milieu $\varepsilon = \frac{A}{F} = \frac{20}{20}$, quantité égale à l'unité $\frac{n}{a} = 0$, et F n'a pas de révolution absolue. Enfin, dans le train inférieur $\varepsilon = \frac{A}{G} = \frac{20}{19}$ plus grand que l'unité, et G tourne en arrière.

Ainsi par une même rotation du levier, E tourne dans le même sens que lui, G en sens contraire, et F reste en repos ; chaque point de sa circonférence demeure toujours dans la même direction. De là l'apparent paradoxe d'où provient le nom de cet appareil destiné à faire comprendre les propriétés des combinaisons de ce genre.

478. *Deuxième exemple. — Mouche ou roue planétaire.* La disposition que nous allons décrire avait d'abord été employée par Watt pour convertir le mouvement alternatif du piston de la machine à vapeur en mouvement circulaire. Sur l'axe du volant est montée une roue dentée A (fig. 382), qui engrène avec une roue dentée B fixée à l'extrémité de la bielle DB, le centre B étant réuni au centre A par le levier BA qui maintient le contact des deux roues. Quand le piston par son action exercée sur le balancier entraîne le levier BA, celui-ci tournerait autour du centre A comme une manivelle ordinaire, si la roue B attachée à la bielle DB, ne venait modifier cette action.

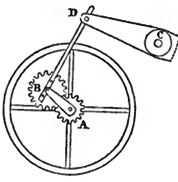


Fig. 382.

En effet, les roues A, B, avec le levier AB, constituent un train épicycloïdal, dans lequel $\frac{A}{B} = \varepsilon$ est négatif, puisque les roues

tournent dans des directions opposées, et la dernière roue n'a pas de rotation absolue puisqu'elle est fixée à la bielle. La formule générale qui est : $m = a + \frac{n-a}{\varepsilon}$ deviendra donc en faisant $n = 0$ et $\varepsilon = -\frac{A}{B}$, $\frac{m}{a} = 1 + \frac{B}{A}$.

Dans la machine de Watt les roues sont égales, par suite $m = 2a$, et le volant fait deux tours pour un de la manivelle.

479. Cet appareil est curieux et susceptible de quelques applications pour obtenir simplement des multiplications de vitesses.

Son effet s'analyse facilement en calculant les vitesses angulaires.

Soit V_1 la vitesse angulaire avec laquelle le centre B se meut autour de A, R le rayon de chacune des roues dentées, $2RV_1$ sera le chemin parcouru en une seconde par le centre de la roue B. Puisque cette roue est fixée invariablement à la bielle, tous les chemins parcourus simultanément par tous les points de cette roue sont égaux à celui que parcourt son centre, sont transportés comme lui. Ainsi $2RV_1$ sera aussi le chemin parcouru par la roue B à son point de contact avec la roue A. Soit V'_1 la vitesse angulaire de cette dernière, le chemin parcouru par le point de contact en tant qu'il appartient à la roue A sera représenté par V'_1R. Donc $V'_1R = 2V_1R$ ou $V'_1 = 2V_1$; c'est-à-dire que la vitesse angulaire ou le nombre des tours du volant est double de la vitesse angulaire de l'extrémité de la bielle ou du nombre des oscillations complètes de celle-ci.

Et en général, si $AB = (n+1)R$, $V'_1 = (n+1)V$.

480. M. Saladin de Mulhouse a publié un curieux travail sur la *mouche*, sur les diverses vitesses qu'on peut obtenir suivant le rapport des rayons des roues.

Les vitesses des deux roues, l'une fixée à la bielle, l'autre montée sur l'arbre du volant, étant dans le rapport de 1 à $1 + \frac{R}{R'}$.

On voit que pour :

$R = R'$, chaque oscillation donne 2 tours du volant,
$R = 2R'$, » 3 »
$R = \frac{1}{2}R'$, » $1 + \frac{1}{2}$ »

et ainsi de suite.

On aura donc ainsi un nombre de tours du volant plus grand que le nombre d'oscillations de la bielle et dans le rapport que l'on voudra, pourvu que le mouvement de la bielle ait une amplitude convenable.

Si l'on voulait obtenir un nombre de rotations inférieur à celui des oscillations de la bielle, on ne pourrait y parvenir par le système précédent. Mais si, comme le propose M. Saladin, on interpose entre les deux roues une roue intermédiaire quelconque, l'effet de cette roue est de changer le sens de la rotation due à l'engrènement, et le rapport des vitesses devient $1 - \frac{R}{R'}$. En effet, si la roue fixée à la bielle tourne dans un sens, l'engrenage au moyen de la roue intermédiaire communique une rotation inverse, et le résultat définitif sera la différence de ces deux mouvements.

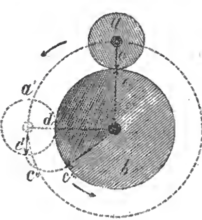
Ainsi $R = R'$ donne zéro, le balancier marchant, l'arbre du volant n'aura pas de rotation; $R = 2R'$ donne -1 ou un tour en arrière; $R = \frac{R'}{2}$ donne $\frac{1}{2}$ tour dans le sens du mouvement de la bielle.

On voit ainsi comment, pour un même mouvement de la bielle, l'arbre du volant peut rester fixe, ou tourner soit à droite, soit à gauche, avec une vitesse qu'on est libre de varier avec les engrenages.

Les mêmes effets peuvent s'obtenir au moyen de poulies et de courroies ou de cordes. Si la courroie est croisée, l'effet est le même qu'avec deux roues de mêmes rayons que les poulies, tandis que la courroie non croisée répond au même système augmenté d'une roue intermédiaire.

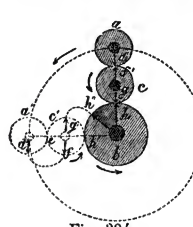
481. Nous empruntons à M. Saladin deux figures qui indiquent bien les circonstances du mouvement.

Ainsi, dans le système représenté fig. 383, dans lequel la roue fixe est double de la roue stellaire, la rotation du volant est de 1 tour et demi pour une oscillation du balancier. En effet, considérons la roue stellaire après qu'elle a parcouru un quart de circonférence; le rayon vertical ac est toujours vertical en $a'c'$, puisque la roue ne tourne pas. Cherchons ce qu'est devenu le point c sur la roue b.


Fig. 383.

Si le disque a, au lieu d'être fixé à la bielle, eût été fixé à la manivelle, le cercle b eût tourné d'un quart de circonférence et le point de contact fût resté constant. Mais comme cette roue a est fixée à la bielle, le point de contact primitif s'est éloigné par l'effet des dents des roues, en parcourant des longueurs égales sur les deux circonférences à partir du point de contact. Si donc on développe dc' et qu'on enveloppe cet arc sur la circonférence b, c'' sera la nouvelle position du point c, et la rotation de b pour celle de $\frac{1}{4}$ de a sera $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, puisque $dc'' = \frac{1}{4}\,a = \frac{1}{8}\,b$. Le rapport des vitesses sera donc de 1 à $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

La fig. 384 représente un système à trois roues, a roue de commande et à translation, c roue intermédiaire aussi à translation, b roue commandée d'un rayon double de celui de la roue motrice. Lorsque le disque a est venu en a', son rayon d restant vertical sera venu en d'. Si du point de contact e comme centre de mouvement, nous développons l'arc ed' pour le porter sur le disque c', nous trouvons que le rayon f du cercle c est venu en f', et que le rayon opposé g est venu en g'; si enfin du point de contact h' nous reportons


Fig. 384.

sur b l'arc développé $g'h'$, la développante qui part du point g' rencontrera b en h'', et le rayon vertical de b aura parcouru $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ seulement de tour pour $\frac{1}{4}$ de tour de a, soit $\frac{1}{2}$ tour de b pour un tour de a.

On voit que si les rayons de a et b étaient égaux, b resterait immobile, les deux mouvements en sens contraire étant égaux, et qu'enfin si la roue stellaire était celle du plus grand rayon, le mouvement serait rétrograde.

482. La fig. 385 représente le cas d'un tour en arrière en employant des courroies non croisées, et une roue a d'un rayon double de celui de la roue b. Après un quart de tour, les positions relatives de points situés au départ sur des rayons perpendiculaires au même brin s'obtiendront en enroulant sur la circonférence de a, à partir de la position du rayon primitif, une longueur de la courroie égale à un quart de circonférence et l'enroulant autour de la seconde par la rotation de celle-ci; c'est-à-dire en traçant deux arcs de developpantes. La rotation définitive sera $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{4}$, puisque $\frac{1}{4}$ de $a = \frac{2}{4}$ de b. Pour une rotation complète de a, la rotation de b sera donc de -1, ou un tour en arrière.

Fig. 385.

483. Nous avions d'abord supposé que la bielle restait toujours parallèle à elle-même, était infinie; les tracés précédents montrent comment, quand la bielle est courte, les inégalités de la vi-

tesse de rotation croissent avec les inclinaisons de la bielle, et que cette vitesse est plus grande dans les parties placées au-dessus du diamètre horizontal que pour celles placées au-dessous. Cela résulte de la position du rayon vertical de la roue stellaire au point de con-

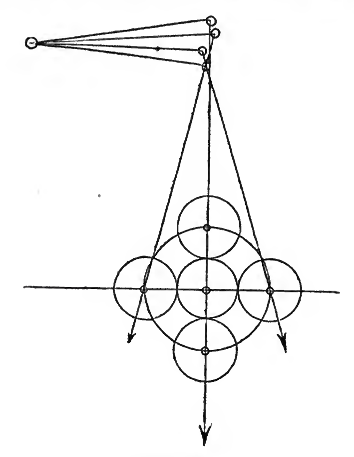


Fig. 386.

tact, qui reste toujours dans la direction de la bielle, ce qui rend l'arc à retrancher ou à ajouter plus grand ou plus petit que dans le cas de la bielle infinie. C'est ce que la figure 386 fait bien voir.

SECOND SYSTÈME DES TRAINS ÉPICYCLOIDAUX.

484. Nous allons étudier l'emploi des trains épicycloïdaux pour établir un rapport exact de vitesse angulaire entre deux axes par des sommes ou des différences de rapports, lorsqu'il ne peut être obtenu par le seul emploi de roues dentées et lorsqu'une simple approximation est inadmissible.

Nous avons vu (art. 471) que si ε est la raison d'un train épicycloïdal et si l'axe menant est réuni avec la première roue par un système dont la raison est μ, et avec la dernière roue par un système dont la raison est ν, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon},$$

quand a et p sont les rotations simultanées du levier portant le train et de l'axe qui conduit ; c'est-à-dire que l'effet des deux trains μ et ν est concentré sur l'axe du levier.

Ce système est appliqué sous une forme simple dans la disposition représentée sur la figure 387.

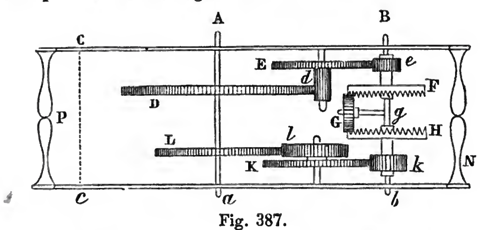


Fig. 387.

Bb est un axe sur lequel est monté le levier Gg, qui porte la roue G ; celle-ci engrène avec deux roues égales F et H, qui sont concentriques avec l'axe Bb, mais sont montées sur des tubes qui tournent librement autour de celui-ci.

Le train épicycloïdal consiste donc en trois roues F, G, H; F pouvant être considérée comme la première roue et H comme la dernière.

Aa est l'axe moteur, qui porte les deux roues D et L; D sert à mettre l'axe en rapport avec la première roue F du train épicycloïdal (avec le tube qui la porte) au moyen du système de roues dentées et pignons d, E, e; de même L constitue avec l, K et k un système de roues dentées qui réunit l'axe Aa avec la dernière roue H. On a par suite :

$$\mu = \frac{DE}{de} \text{ et } \nu = \frac{LK}{lk}.$$

Le mouvement du train épicycloïdal étant considéré par rapport au levier, on voit que les roues extrêmes F et H se meuvent dans des sens opposés, par suite ε est négatif et égal à :

$$-\frac{F}{H} = -1.$$

Par suite :

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu + \nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{DE}}{de} + \frac{\text{LK}}{lk}\right).$$

Si donc le rapport $\frac{a}{p}$ est donné, que son numérateur ou son dénominateur, ou tous les deux, ne soient pas décomposables en facteurs premiers, il devient facile de déterminer deux fractions décomposables dont la somme soit égale à la fraction proposée, et de les employer pour former un système semblable à celui de la figure.

Cet emploi des systèmes épicycloïdaux est donné par M. Francœur (*Dictionnaire technologique*, t. XIV, p. 431), auquel nous empruntons les calculs ci-après. Il attribue ce mécanisme à MM. Pecqueur et Perrelet, qui l'ont employé en 1823; la première idée de ces méthodes, suivant M. Willis, est due à Mudge, qui a construit vers 1767 une horloge qui donnait le mouvement lunaire par trains épicycloïdaux.

Appliquons ces résultats aux cas pour lesquels le système simple de roues dentées ne suffit plus, ce qui a lieu quand $\frac{\text{T}_m}{\text{T}_1} = \alpha$, α n'est plus un nombre commensurable et que les deux termes ne peuvent se décomposer en nombres premiers.

485. *Premier cas.* Soit $\frac{a}{p}$ une fraction dont le dénominateur est décomposable en facteurs, mais non le numérateur.

Soit le dénominateur $p = fgh$, la fraction qui représente le rapport des vitesses est $\frac{a}{fgh}$. Le dénominateur pouvant souvent se décomposer en trois facteurs de diverses manières, chacun fournit une solution distincte du problème.

On décomposera $\frac{a}{fgh}$ en deux fractions convenables en posant :

$$\frac{a}{fgh} = \frac{fx}{fgh} + \frac{gy}{fgh},$$

c'est-à-dire $a = fx + gy$.

Il est facile de résoudre cette équation en nombres entiers pour

x et y, et d'obtenir une infinité de valeurs de x et y qui satisfont au problème et donnent :

$$\frac{a}{fgh} = \frac{x}{gh} + \frac{y}{fh},$$

f et g devant être premiers l'un et l'autre, puisque a est premier par hypothèse.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{271}{216}$. Puisque $216 = 4 \times 9 \times 6$, nous poserons $271 = 9x + 4y$ ou $f = 9$, $g = 4$. Les méthodes ordinaires de l'analyse indéterminée donnent pour toutes les valeurs qui satisfont à ces équations les deux expressions $x = 31 - 4t$ $y = 9t - 2$, t étant tout nombre entier positif ou négatif.

On a ainsi : $x = 27,\ 23,\ 19\ \ldots\ 31,\ 35,\ 39$
$y = 7,\ 16,\ 25\ \ldots\ -2\ -11\ -20$
pour les valeurs de t, $1\ \ 2\ \ 3\ \ldots\ -0\ -1\ -2$

Comme $gh = 24$, $fh = 54$, la fraction $\frac{271}{216}$ est donc égale à :

$$\frac{27}{24} + \frac{7}{54},\ \frac{23}{24} + \frac{16}{54},\ \frac{19}{24} + \frac{25}{54},$$

ou encore à :

$$\frac{31}{24} - \frac{2}{54},\ \frac{35}{24} - \frac{11}{54},\ \frac{39}{24} - \frac{20}{54},$$

et ainsi de suite.

La première série se rapportant au cas où les roues tournent dans la même direction ; la seconde, quand les sens de rotation sont différents.

Puisque 8 et 3 n'ont pas de facteur premier, le dénominateur 216 peut être décomposé en $8 \times 3 \times 9$ et en posant $271 = 8x + 3y$, on a :

$$x = 3t - 1 \quad y = 93 - 8t,$$

d'où $x = 2,\ 5,\ 8\ .\ -1\ -4\ -7$
$y = 85,\ 77,\ 69\ .\ .\ 93,\ 101,\ 109,$

ce qui fournit les nouvelles décompositions :

$$\frac{2}{27} + \frac{85}{72},\ \frac{5}{27} + \frac{77}{72},\ \frac{8}{27} + \frac{69}{72},\ \frac{93}{72} - \frac{1}{27}\ldots..$$

et ainsi de suite pour d'autres solutions.

En général, le dénominateur de la fraction proposée pouvant être décomposé en facteurs premiers et mis sous la forme $m^{\alpha} n^{\beta} p^{\gamma}$..., chaque paire de ces diviseurs peut être prise pour les quantités f et g, pourvu qu'ils soient premiers l'un par rapport à l'autre. Si alors on résout l'équation $a = fx + gy$ en nombres entiers, on a les valeurs des fractions composantes $\frac{x}{gh} + \frac{y}{fh}$, dans lesquelles h est le produit du reste des facteurs du dénominateur après qu'on a retiré f et g.

486. *Second cas.* On suppose dans ce cas que le numérateur et le dénominateur sont tous deux premiers.

Formons deux fractions $\frac{a}{A}$ et $\frac{a_1}{A}$, a, a_1 étant le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée et A une quantité arbitraire commodément décomposable en facteurs, et obtenons pour chacune de ces fractions les sommes ou les différences de deux fractions qui lui sont égales, comme nous avons fait ci-dessus.

Soit un axe Aa (fig. 387) réuni à un autre Bb par des roues dentées et un train épicycloïdal comme dans la figure, et en outre avec un autre axe Cc par un système semblable. Les rotations simultanées des axes Aa, Bb, Cc seront A et a, a_1; μ, ν seront les raisons des trains réunissant Aa avec Bb, et μ_1 ν_1 celles des trains réunissant Aa avec Cc. On aura donc :

$$\frac{a}{A} = \frac{\mu + \nu}{2} \text{ et } \frac{a_1}{A} = \frac{\mu_1 + \nu_1}{2} \text{ et } \frac{a}{a_1} = \frac{\mu + \nu}{\mu_1 + \nu_1}$$

pour rapport des rotations simultanées de Bb et Cc.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de faire faire à un axe 17321 tours quand un autre en fait 11743 ; les deux nombres étant premiers, la fraction $\frac{17322}{11743}$ est irréductible et indécomposable en facteurs premiers.

Prenons un diviseur $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$, et formons deux trains dont les vitesses soient représentées par $\frac{17321}{5040}$ et $\frac{11743}{5040}$.

Pour la première, on obtient par la méthode précédente :

$$\frac{17321}{5040} = \frac{1480}{630} + \frac{783}{720} = \frac{148}{63} + \frac{87}{80},$$

d'où les trains $\frac{74}{63}$ et $\frac{87}{40}$ comme dans la précédente méthode.

Pour le second train :

$$\frac{11743}{5040} = \frac{830}{633} + \frac{729}{720} = \frac{83}{63} + \frac{81}{80},$$

d'où les trains $\frac{166}{63}$ et $\frac{81}{40}$. Le problème consistant à obtenir les deux mouvements demandés sera ainsi complétement résolu.

TROISIÈME SYSTÈME DES TRAINS EPICYCLOIDAUX.

487. Nous avons dit que cette troisième application avait pour objet de produire un mouvement accéléré ou retardé. Le premier problème trouve son application dans les bancs à broches à mouvement différentiel.

Nous allons en décrire la disposition, d'après M. E. Saladin, de Mulhouse.

Transmission à deux vitesses. Le mouvement est imprimé à un axe (fig. 388 et 389) par une courroie c, passant sur une

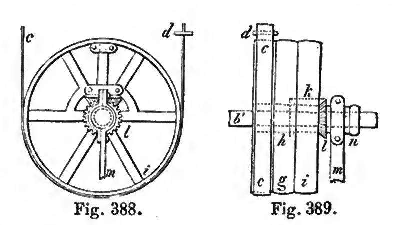


Fig. 388. Fig. 389.

poulie folle e montée sur l'arbre moteur ; d guide de la courroie ; g poulie fixée sur l'arbre ; h roue d'angle fixée sur la douille de cette poulie ; i poulie folle de même diamètre que les deux premières servant à la double vitesse ; k deuxième roue d'angle portée transver-

salement par la poulie i, engrenant avec la première h; l troisième roue d'angle à douille de même nombre de dents que la première h, engrenant avec la seconde k, et montée librement sur l'arbre b'; m frein pouvant être serré sur la douille de la roue d'angle l, et pouvant la rendre fixe.

Lorsque la courroie e passe de la poulie folle e sur la poulie fixe g, elle transmet à cette dernière la vitesse qu'elle reçoit du tambour moteur b; mais lorsqu'elle commande la poulie i, l'arbre peut tourner avec une vitesse double.

En effet, le système devient alors tout à fait semblable à celui de la fig. 377, pour lequel nous avons trouvé $n = 2a$, lorsque la roue l devient immobile. Si on fait abstraction de la roue l, et qu'on suppose pour un instant la poulie i assemblée sur l'arbre, les poulies g, i, tourneront ensemble d'une même vitesse, et les deux roues d'engrenage tourneront avec elles sans agir. Mais lorsque, par l'action du frein, la roue l cesse de tourner avec l'axe, la vitesse de la circonférence de la poulie restant constante, la roue k tourne, et elle est ici la roue supportée par le levier dans le train épicycloïdal, dont la première roue l est fixe.

Si, au lieu d'être immobile, la roue l avait une vitesse angulaire v, la vitesse de l'arbre deviendrait $v \pm 2v'$ (v' étant la vitesse angulaire de l'arbre communiquée par la courroie), suivant que le mouvement initial de la roue l serait en sens contraire ou dans le même sens que celui imprimé par la courroie. C'est ce que donne la formule (2) de l'art. 468 : $n = a + (m - a)\,\varepsilon$, dans laquelle on fait $\varepsilon = -1$, d'où $n = -m + 2a$.

Il faut observer que lorsque la double vitesse commence, le frein doit laisser glisser un peu la roue l, lorsque l'effort est trop grand, dans le but d'éviter le changement instantané de vitesse et les ruptures qui pourraient en résulter.

488. *Second exemple.* — *Compteurs.* Voyons maintenant l'emploi des trains épicycloïdaux pour produire un mouvement très lent.

Reportons-nous à la formule $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1}$, dans laquelle tous les termes sont considérés comme positifs. Si, au contraire, ε est né-

gatif, μ et ν de signes différents, la formule devient : $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon + 1}$, dans laquelle en choisissant convenablement les systèmes de roues, a peut être fait très petit par rapport à p, et par suite le levier tourner très lentement.

Si on suppose l'arrangement de la fig. 380 :

$$\frac{a}{p} = \frac{aceg - hbdf}{bg(ce + df)};$$

dans cette expression, les deux termes du numérateur n'ayant pas de commun diviseur peuvent être pris différents d'une unité seulement, ce qui produit un rapport excessivement petit.

Par exemple, posons a, c, e, g égaux chacun à 83, $b = 106$ $d = 84, f = 65, h = 82$, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{83^4 - 82 \times 106 \times 84 \times 65}{106 \times 83\,(83^2 + 84 \times 65)} = \frac{1}{108646502}.$$

Si dans cette machine on supprime les roues h et e, en faisant agir a sur b et g, et d sur f et c, on a :

$$\frac{a}{p} = \frac{a}{bg} \times \frac{cg - bf}{c + f} = \frac{20}{100 \times 99} \times \frac{101 \times 99 - 100^2}{101 + 100} = \frac{1}{99495}.$$

489. Si au contraire on veut faire tourner l'axe, dont les révolutions sont p, lentement par rapport au levier, alors le numérateur de la fraction $\frac{a}{p}$ doit être une somme et le dénominateur une différence voisine d'une unité, c'est-à-dire que ε doit être positif dans l'expression $\frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1}$ et très voisin de l'unité, μ et ν avoir des signes différents.

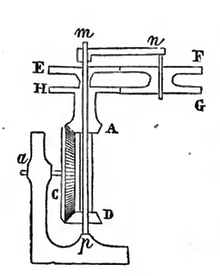


Fig. 390.

La figure 390 représente une combinaison qui répond à cette disposition. mp est un axe fixe autour duquel tourne un long tube dont l'extrémité inférieure porte la roue D et l'extrémité supérieure la roue E. Un tube plus court

tourne en outre autour du premier, et porte à ses extrémités les roues A et H. La roue C engrène à la fois avec les roues D et A, et le levier *mn*, qui tourne librement autour de *mp*, porte sur un axe *n* les roues réunies F et G. Dans le train épicycloïdal composé des roues E, F, G et H, ε est évidemment positif, les roues extrêmes E, H tournant dans la même direction, H étant la première roue du train épicycloïdal, et on a : $\varepsilon = \frac{HF}{GE}$.

D'ailleurs, $\mu = \frac{C}{A}$ et $\nu = \frac{C}{D}$, et ont des signes différents, puisque A et D tournent dans des sens différents, donc :

$$\frac{a}{p} = \frac{\frac{C}{A} \cdot \frac{HF}{GE} + \frac{C}{D}}{\frac{HF}{GE} - 1}.$$

Si, par exemple, $A = 10$, $C = 100$, $D = 10$, $E = 61$, $F = 49$, $G = 41$, $H = 51$, on aura $\frac{a}{p} = 25000$, c'est-à-dire qu'il se produira 25000 rotations du levier *mn* pour un tour de la roue C.

490. Généralement la première roue du train épicycloïdal est fixe; dans ce cas, la formule qui convient est $\frac{n}{a} = 1 - \varepsilon$.

Si ε est positif et très voisin de l'unité, cette valeur sera très petite, et *n* petit par rapport à *a*, c'est-à-dire que le mouvement de la dernière roue du train est lent par rapport à celui du levier.

Des formes simples des trains épicycloïdaux des fig. 376, 377 et 378, les deux dernières ne sont pas propres à réaliser ce système, parce que ε est négatif, mais pour la disposition de la fig. 376 peut être employée; A étant fixe et $\frac{n}{a} = 1 - \frac{AE}{bD}$; pour avoir le plus petit mouvement possible, il faut poser $AE - bD = \pm 1$.

Soit $\varepsilon = \frac{101 \times 99}{100 \times 100}$, on aura $\frac{n}{a} = \frac{1}{10000}$; mais d'aussi grands

nombres de dents ne sont pas convenables pour les roues entraînées par le levier.

Soit $\varepsilon = \frac{111 \times 9}{100 \times 10}, \frac{n}{a} = \frac{1}{1000}$, ou $\varepsilon = \frac{31 \times 129}{32 \times 125}, \frac{n}{a} = \frac{1}{4000}$.

Ces combinaisons sont employées dans des compteurs comme les combinaisons de l'art. 373. Les roues A et D (fig. 376) étant à très peu près de même contour, les pignons *b* et E entraînés par le levier peuvent avoir un même nombre de dents, ou, en d'autres termes, un pignon épais être substitué à celles-ci et engrener avec la roue fixe A et la roue D qui se meut lentement.

Soit M, M — 1 et K les nombres de dents de D, A et du pignon épais respectivement; alors

$$\frac{a}{n} = 1 - \frac{K(M-1)}{KM} = \frac{1}{M}.$$

M étant le nombre de dents de la roue qui se meut lentement.

QUATRIÈME SYSTÈME DES TRAINS EPICYCLOIDAUX.

491. Cette dernière application se rapporte aux systèmes qui ont pour but de concentrer les effets de deux ou d'un plus grand nombre de systèmes de rotation sur une pièce unique.

Comme exemple de cette application, nous prendrons l'équation des horloges, curieux problème dont la solution occupe une place importante dans l'histoire de l'invention des mécanismes, et a été l'objet de nombreux travaux depuis une époque reculée jusqu'à nos jours. Le but à atteindre est de faire marquer à l'aiguille d'une horloge non seulement l'heure, mais aussi le temps vrai. Pour cela, on agit comme les astronomes pour le mouvement du soleil, c'est-à-dire qu'on divise ce mouvement en deux mouvements élémentaires, l'un uniforme qui correspond au temps moyen, et l'autre qui correspond à la différence du temps moyen et du temps vrai ou à l'équation du temps. On réunit deux mécanismes, l'un celui d'une horloge ordinaire, et l'autre disposé de manière à communiquer un mouvement lent correspondant à l'équation du temps, et on concentre les effets des trains séparés sur une seule

aiguille à l'aide d'un train épicycloïdal. Il y a trois arrangements possibles :

Le mouvement de l'équation peut être communiqué à une extrémité du train et le mouvement moyen à l'autre, le levier possédera alors le mouvement solaire (Lebon proposait un système semblable en 1722).

Le mouvement de l'équation peut être communiqué à une extrémité du train, et le mouvement moyen au levier, l'autre extrémité du train donnera le mouvement solaire.

Enfin, le mouvement de l'équation peut être communiqué au levier ; le temps moyen à une extrémité du train, l'autre extrémité recevra le mouvement solaire (c'est le système des horloges de Du Tertre, 1742, et d'Enderlin). Nous allons décrire cette dernière disposition.

492. La figure 391 permet de voir la disposition des roues

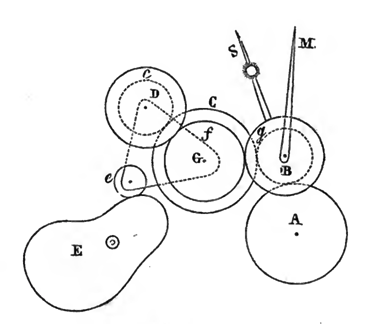


Fig. 391.

dentées et de l'équation qui communiquent le mouvement aux aiguilles.

G est le centre de mouvement du train épicycloïdal, G D *e* le levier sur lequel sont montés les axes. Les roues *f* et C tournent librement autour de l'axe *e* G, et l'axe D est entraîné par le levier ainsi que les deux roues *c*, D qui tournent avec lui et qui engrènent respectivement avec *f* et C. Le train épicycloïdal

consiste donc en quatre roues C, c, D, f et C est la première roue. Maintenant si on suppose la roue C menée par la roue B, dont le mouvement dérive de celui de la roue A faisant partie d'une horloge ordinaire, et si l'aiguille des minutes est montée sur l'axe de B, elle indiquera le temps moyen à la manière ordinaire.

Le mouvement de l'équation est communiqué à la pièce GDe comme il suit :

E est un excentrique dont la révolution s'accomplit en une année. Un rouleau de frottement adapté au levier repose sur le contour de cet excentrique, et est maintenu en contact par un poids ou un ressort. L'excentrique est taillé de manière à faire prendre au levier un mouvement angulaire convenable.

La première roue du train reçoit le mouvement moyen; l'autre extrémité engrène avec une roue g concentrique avec la roue à minutes M et tourne librement autour de son axe; l'aiguille solaire S est fixée au tube qui porte cette roue et reçoit la combinaison du mouvement moyen et de l'équation.

La formule applicable à ce cas est $n = a(1 - \varepsilon) + m\varepsilon$, dans laquelle ε est positif et égal à $\frac{Cc}{Df}$. Si nous désignons les rotations simultanées de l'aiguille des minutes M et de C par M et m respectivement, on a : $m = M\frac{B}{C}$, et celles de f et g par n et s, on a : $n = s\frac{g}{f}$, substituant ces valeurs dans la formule, on a :

$$s = a\,\frac{Df - Cc}{Dg} + M\,\frac{Bc}{Dg},$$

dont la première partie se rapporte à l'équation et la deuxième au mouvement moyen.

Mais le mouvement moyen de S doit être le même que celui de M, on doit donc avoir $\frac{Bc}{Dg} = 1$. Et pour la partie du mouvement de S due à l'équation, l'expression $a\,\frac{Df - Cc}{Dg}$ montre

le rapport qui doit exister entre la vitesse angulaire du levier portant les axes et celle de l'aiguille.

Si le levier se meut avec la même vitesse angulaire que l'aiguille, alors $\frac{Df - Cc}{Dg} = 1$, ce que l'on peut obtenir en faisant $f = c = g$ et $C = 2D$; d'ailleurs puisque $Bc = Dg$, si $c = g$, on a $B = D$; ce sont les proportions employées par Enderlin.

Si on veut que le levier se meuve d'un angle plus petit que l'aiguille, moitié par exemple, il faut alors poser $C = 3D$, et ainsi de suite.

IV. MOUVEMENTS ALTERNATIFS EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupés des organes de transformation de mouvement qui correspondent aux mouvements circulaires et rectilignes. Nous avons ainsi étudié les roues dentées, les plans inclinés, les cordes, qui servent généralement pour les mouvements continus, mais aussi dans beaucoup de cas pour des transformations de mouvements alternatifs ; il nous reste à étudier, au point de vue du mouvement des guides, les leviers et les bielles, éléments principaux de transformation des mouvements alternatifs.

493. Soit une longue bielle ABC (fig. 392), B un de ses points,

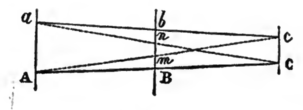


Fig. 392.

son milieu par exemple, je suppose qu'un petit mouvement Aa, perpendiculaire à sa longueur soit communiqué à son extrémité A, l'autre extrémité C restant en repos, le point B décrira sensiblement l'espace $Bn = \frac{Aa}{2}$.

Si au contraire A restant en repos, on eût imprimé à C un petit

mouvement Cc transversal à la barre, le point B aurait décrit sensiblement le chemin $Bm = \frac{Cc}{2}$.

Donc si les deux mouvements en question sont communiqués, soit simultanément, soit successivement aux deux extrémités, le centre B parcourra le petit chemin $Bb = \frac{Aa + Cc}{2}$, ou si ces deux mouvements imprimés étaient de sens contraire, de manière à amener la bielle dans la position aC, le milieu de la bielle décrirait le petit chemin $mn = \frac{Aa - Cc}{2}$.

Il est clair qu'on suppose ici la barre assez longue pour que Cc, Aa, Bb puissent être considérés tous trois comme perpendiculaires à la bielle.

Donc si l'on communique deux mouvements virtuels ou élémentaires indépendants, aux extrémités d'une bielle perpendiculairement à sa direction, son milieu décrit la moitié de leur somme ou de leur différence, suivant que ces mouvements sont de même sens ou de sens contraire.

Si ce sont les points A et B auxquels on fait décrire successivement de petits chemins, le point C décrit alors un chemin égal à celui que parcourt A, mais en sens contraire, et deux fois le chemin que parcourt B dans le même sens que ce dernier point.

494. Soit enfin une barre dont le centre est en E (fig. 393) et

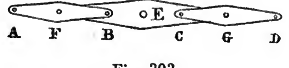


Fig. 393.

aux deux extrémités de laquelle sont fixées des chevilles F et G, qui portent les centres autour desquels tournent deux autres barres AB, CD. Si l'on imprime aux quatre points A B C D quatre mouvements indépendants les uns des autres, les mouvements de A et B se composeront en F, comme il est dit ci-dessus, ceux de C et D se composeront de même sur G, et enfin ceux de F et de G se composeront de même en E.

495. Un système fondé sur ces propriétés, dit *zigzag*, permet de transformer, par une combinaison de leviers, un double mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne.

Ce système dérive de celui de la fig. 331, représentant la transformation de circulaire alternatif en rectiligne alternatif à l'aide de la bielle et de la manivelle, si l'on change les bielles, en les prolongeant, en deux autres leviers oscillant autour d'un centre mis en mouvement par le premier système. On obtient ainsi la disposition de la fig. 394, dans laquelle le point de rencontre des deux premiers leviers est le seul point fixe.

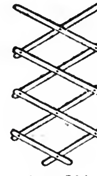


Fig. 394.

Ce système se trouve ainsi formé d'une réunion de parallélogrammes par l'articulation de barres parallèles deux à deux. Elles pourraient à la rigueur ne pas être parallèles, pourvu qu'elles fussent deux à deux d'égale longueur, ou encore être parallèles et de longueur différente, mais il suffirait alors de rétablir les parallélogrammes élémentaires égaux au premier, pour évaluer la vitesse. Les divers centres des articulations se meuvent sur une même ligne droite, pourvu que les deux leviers moteurs parcourent un même angle.

Il est facile d'évaluer les vitesses dans cet appareil. Pour un seul losange, le systeme n'est que celui de la bielle comme nous l'avons vu, c'est-à-dire que pour passer de l'angle ω à l'angle ω' du levier avec la diagonale, l étant la longueur entre deux articulations, r la longueur des leviers moteurs, le mouvement angulaire sera $r\,(\omega - \omega')$, et le mouvement rectiligne $l\,(\cos.\ \omega' - \cos.\ \omega)$.

Appelons a cette quantité, elle se répétera pour chaque parallélogramme, et s'il y en a n égaux entre eux, le chemin parcouru par le point extrême sera na.

Les deux limites du mouvement sont nl lorsque les bielles sont parallèles à la diagonale passant par l'articulation fixe et se touchent, et np, p étant l'épaisseur des barres lorsqu'ils sont en ligne droite et que toutes les barres sont en contact. Le chemin total,

qui pourra être parcouru par l'articulation extrême, pour un mouvement angulaire de 0° à 90°, est donc $n(l - p)$.

496. *Parallélogramme de Watt.* C'est surtout pour fournir des guides du mouvement rectiligne, comme moyen de produire par le mouvement circulaire alternatif un mouvement rectiligne alternatif, que le système des articulations est employé par diverses méthodes qui dérivent de celles que Watt a le premier appliquées à la machine à vapeur.

Considérons d'abord une bielle dont les deux extrémités sont assemblées à deux leviers ou rayons décrivant des arcs de cercle, système employé dans la plupart des machines à vapeur ou à piston en général, piston dont on cherche toujours à diriger sensiblement en ligne droite la tige assemblée à un point de cette bielle.

Aa, Bb sont les deux bras ou rayons qui tournent autour des centres A et B, ab est la bielle articulée à leurs extrémités mobiles; la fig. 395 indique diverses positions du système.

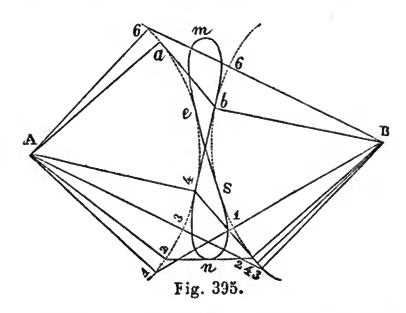


Fig. 395.

Un point c pris vers le milieu de la bielle décrit la courbe en forme de 8, mcn; et le chemin qu'il décrit est une courbe connue sous le nom de *courbe à longue inflexion*, qui se confond très sensiblement dans une partie du mouvement avec une droite.

M. de Prony a donné l'équation complète de cette courbe, mais elle est beaucoup trop complexe pour être d'aucune utilité dans la pratique, et il est bien plus simple et suffisamment exact, au lieu d'en faire usage, de recourir aux approximations suivantes.

497. Soient A, C, les centres de rotation des bras ou rayons AB, CD (fig. 396) ; BD la bielle articulée à leurs extrémités ; admettons d'abord que cette bielle soit perpendiculaire aux deux rayons dans la position médiane ABCD du système.

Faisons mouvoir AB jusqu'à la position A*b*, C*c* et *bc* seront les positions correspondantes de l'autre rayon et de la bielle. Menons *bf* parallèle à BD.

Dans la première position, la bielle est perpendiculaire aux rayons ; dans la seconde, elle prend une position oblique *bc*, telle que son extrémité supérieure est jetée à gauche et son extrémité inférieure est jetée à droite de la verticale BM*d* de quantités respectives *be*, *dc* qui ne sont autre chose que les sinus-verses des

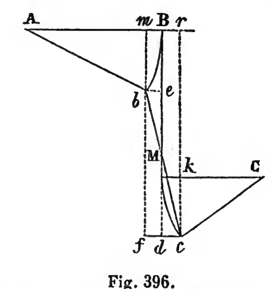


Fig. 396.

arcs décrits pour les rayons. Il y a quelque part sur la bielle un point situé sur la verticale BM*d*, et le lieu de ces points se déterminera par la proportion :

$$bM : Mc :: be : dc,$$

faisant AB = R, CD = r, BD = l, BA$b = \theta$, DC$c = \varphi$ et bM$= x$, on a :

$$\frac{x}{l-x} = \frac{\text{R sin. vers.}\,\theta}{r\,\text{sin. vers.}\,\varphi} = \frac{\text{R}\sin.^2\frac{\theta}{2}}{r\sin.^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{\text{R}} \times \frac{\text{R}^2\sin.^2\frac{\theta}{2}}{r^2\sin.^2\frac{\varphi}{2}}.$$

L'angle BA$b = \theta$ ne dépassant jamais 20° dans la pratique, l'inclinaison cbf de la bielle est toujours assez petite et Bb = Rθ

est à très peu près égal à $Dc = r\varphi$. Comme ces angles sont très petits, les sinus diffèrent peu des angles, donc sans erreur sensible on pourra encore poser :

$$R \sin.\frac{\theta}{2} = r \sin.\frac{\varphi}{2},$$

$$\text{d'où } \frac{x}{l-x} = \frac{r}{R} \text{ et } x = \frac{lr}{R+r}.$$

Soit $R = 7$, $r = 4$, $l = 2$, on a : $x = \frac{8}{11} = 0{,}727$.

498. La déviation du point M, à partir de la ligne BD, peut facilement s'évaluer comme il suit, et cette recherche est utile pour déterminer la plus grande valeur qu'il convienne d'attribuer à θ. Pour plus de simplicité, nous ferons $R = r$ ou $AB = CD$, comme cela a lieu dans la pratique, et nous prendrons R pour unité. Menons bf, rc parallèles à BD et soit γ l'inclinaison fbc de la bielle sur la verticale.

fbc étant un très petit angle, on a sensiblement :

$$fc = l \sin.\gamma = l\gamma,$$

$$\text{ou } \gamma = \frac{fc}{l} = \frac{\text{sin. vers. }\theta + \text{sin. vers. }\varphi}{l} = \frac{2 \text{ sin. vers. }\theta}{l},$$

à très peu près.

Or $mf = rc$ ou $\sin.\theta + l\cos.\gamma = l + \sin.\varphi$, donc :

$$\sin.\varphi = \sin.\theta - l\,\text{sin.vers.}\gamma = \sin.\theta - \frac{l\gamma^2}{2} = \sin.\theta - \frac{2}{l}(\text{sin.vers. }\theta)^2,$$

expression qui fera connaître la valeur de φ correspondante à une valeur quelconque de θ.

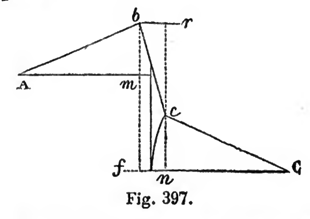


Fig. 397.

Lorsque les rayons se relèvent au-dessus de l'horizontale (fig. 397), on a :

$$bm + mf = rc + cn \text{ ou } \sin.\theta + l = l\cos.\gamma + \sin.\varphi,$$

d'où $\sin.\varphi = \sin.\theta + l(1 - \cos.\gamma) = \sin.\theta + l \sin.\text{vers}.\gamma$

$$= \sin.\theta + \frac{2}{l}(\sin.\text{vers}.\theta)^2,$$

et si la bielle est égale à la moitié de la longueur du rayon, on a pour les deux cas :

$$\sin.\varphi = \sin.\theta \pm 4(\sin.\text{vers}.\theta)^2.$$

Le signe supérieur correspondant au cas où les rayons sont au-dessus de l'horizontale.

Quant à la déviation du centre M de la bielle de la verticale, elle est (art. 493) :

$$\frac{\sin.\text{vers}.\theta}{2} - \frac{\sin.\text{vers}.\varphi}{2} = \frac{\cos.\varphi - \cos.\theta}{2}.$$

On peut ainsi former le tableau suivant :

VALEURS de θ.	AU-DESSUS DE L'HORIZONTALE.		AU-DESSOUS DE L'HORIZONTALE.	
	φ	DÉVIATION.	φ	DÉVIATION.
25°	27° 15'	0,00864	22° 48'	0,00777
20°	20° 54'	0,00274	19° 7'	0,00258
15°	15° 17'	0,00064	14° 44'	0,00060
10°	10° 3'	0,00007	9° 57'	0,00007

Le plus ordinairement on fait le balancier 2 AB égal à trois fois la longueur de la levée, et il décrit alors un angle de 19° environ de chaque côté de l'horizontale.

499. On peut arriver encore à une plus grande exactitude par la disposition représentée sur la figure 398 ; les rayons sont de même longueur et égaux chacun à l'unité, Ab est la position angulaire extrême de AB, BA$b = \theta$; la distance horizontale AK des centres A et C est faite égale AB — CD — sin. vers. θ, au lieu d'être égale comme tout à l'heure à la somme des rayons AB + CD.

Dans cette combinaison, les rayons étant supposés parallèles

lors de leur première position AB CD, la seule inspection de la figure montre que la bielle s'incline tantôt à droite, tantôt à gauche de quantités presque égales, et, par conséquent, le milieu de

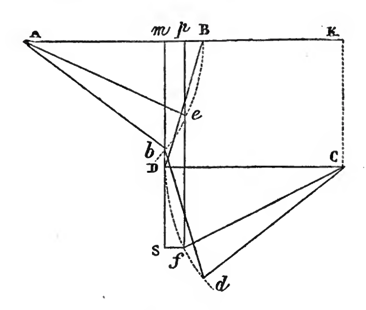


Fig. 398.

cette bielle lors de sa position inférieure bd est sur la verticale qui passe par ce même milieu lors de sa position en BD.

L'inclinaison de la bielle variant sans cesse entre les positions extrêmes, son centre déviera de cette verticale pour des positions intermédiaires d'une quantité facile à calculer et qui sera maximum lorsque cette bielle sera elle-même verticale. Supposons que cela ait lieu lorsque le rayon AB fait au-dessous de l'horizontale un angle $\mathrm{AB}e = \theta_1$ et soit :

$$\mathrm{DC}f = \varphi_1,\ m\mathrm{DB} = dbs = \gamma,$$

on a alors :

$$m\mathrm{D} + \mathrm{D}s = pe + ef \text{ ou } l \cos.\gamma + \sin.\varphi_1 = \sin.\theta_1 + l,$$

d'où $\quad \sin.\varphi_1 = \sin.\theta_1 + l \sin.\text{vers}.\gamma = \sin.\theta_1 + \dfrac{l\gamma^2}{2},$

mais $\quad \gamma = \dfrac{\mathrm{B}m}{l} = \dfrac{\sin.\text{vers}.\theta}{l},$

donc $\quad \sin.\varphi_1 = \sin.\theta_1 + \dfrac{(\sin.\text{vers}.\theta)^2}{2l},$

et la déviation du point milieu $= \dfrac{\cos.\varphi_1 - \cos.\theta_1}{2}.$

La table suivante donne quelques valeurs des angles et des déviations correspondantes; on y suppose comme ci-dessus $l = \frac{1}{2}$ et sin. vers. $\theta = 2$ sin. vers. θ_1, ce qui est sensiblement vrai.

θ	θ_1	φ_1	DÉVIATION.
20°	14° 7′	14° 20′	0,00046
25°	17° 36′	18° 8′	0,00143
30°	21° 1′	22° 6′	0,00347
35°	24° 33′	26° 38′	0,00785

500. Supposons maintenant les rayons AB, CD situés d'un même côté de la bielle cB, le rayon supérieur plus court que le rayon inférieur (fig. 399), et la bielle, prolongée au-dessous de son

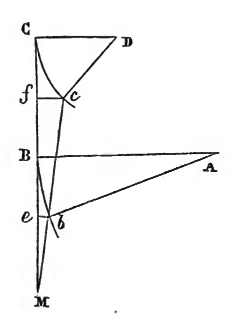


Fig. 399.

point d'articulation avec ce dernier; le rayon supérieur CD décrira toujours un plus grand angle que le rayon inférieur AB, et par suite l'extrémité supérieure de la bielle subira une déviation cf grande que la déviation be de l'autre point d'attache; mais il y aura un point inférieur M de la bielle qui restera sur le prolongement de la ligne cB. Ce point se déterminera facilement par la proportion :

$$\frac{cM}{bM}=\frac{fc}{be}=\frac{r\text{ sin. vers. }\varphi}{R\text{ sin. vers. }\theta}=\frac{R}{r}\times\frac{r^2\text{ sin.}^2\frac{\varphi}{2}}{R^2\text{ sin.}^2\frac{\theta}{2}},$$

équation dans laquelle $R=AB$, $r=CD$, $\theta=BAb$, $\varphi=CDc$.

Or, r sin. $\frac{\varphi}{2}$ = R sin. $\frac{\theta}{2}$ à très peu près ; on a donc pour déterminer le lieu du point M :

$$\frac{cM}{bM}=\frac{R}{r}.$$

501. Le système le plus généralement employé, celui qu'on retrouve dans les grandes machines à vapeur, est celui représenté sur la figure 400, qui a été appliqué sous cette forme par Watt.

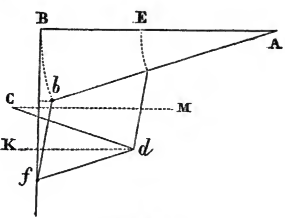


Fig. 400.

Le demi-balancier de la machine AB est lui-même un des rayons des systèmes précédents. Il porte des petites bielles $ed=bf$ et une troisième barre df qui lui est parallèle et égale à be. Une bride Cd s'articule à l'angle d du parallélogramme, et tourne autour d'un point fixe C tel que l'horizontale menée par le point divise en deux parties égales l'angle décrit par le balancier Il s'agit de proportionner la longueur des tiges de telle sorte que f, qu'on nomme quelquefois le point parallèle, se meuve sur la même verticale ou à très peu près.

Soit donc $Ae=R$, $be=fd=R_1$, $Cd=r$.

Menons Kd et CM parallèles à AB, on a $Kdf=BAb=\theta$, et faisons $MCd=\varphi$.

De même que précédemment, le point d est porté vers K d'une quantité égale à $Cd\times$ sin. vers. $\varphi=r$ sin. vers. φ, et le point f

décrit simultanément ce chemin vers K et un autre chemin en sens opposé par le changement d'inclinaison de df, qui est égal à :

$$df \times \text{sin. vers. } fdK = R_1 \text{ sin. vers. } \theta.$$

Si ces deux chemins sont égaux, le point f demeure sur la verticale Bf, ce que l'on veut obtenir. Donc on posera :

$$r \text{ sin. vers. } \varphi = R_1 \text{ sin. vers. } \theta, \text{ ou } \frac{r}{R_1} = \frac{\text{sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{sin.}_2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Mais les leviers Ae, Cd, réunis par la bielle ed fournissent un système semblable à celui de la fig. 396 ; nous pouvons donc écrire de même :

$$Ae \text{ sin. } \frac{\theta}{2} = Cd \text{ sin. } \frac{\varphi}{2}, \text{ ou } R \text{ sin. } \frac{\theta}{2} = r \text{ sin. } \frac{\varphi}{2},$$

à très peu près, d'où :

$$\frac{\text{sin.}^2 \frac{\theta}{2}}{\text{sin.}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{R_1} \text{ et } r = \frac{R^2}{R_1},$$

c'est-à-dire que Ae doit être moyenne proportionnelle entre Cd et df.

502. La fig. 401 montre l'emploi de cette disposition. Quant à la position du centre du levier qui guide le parallélogramme, si la grandeur de celui-ci était donnée à priori, on la déterminerait en

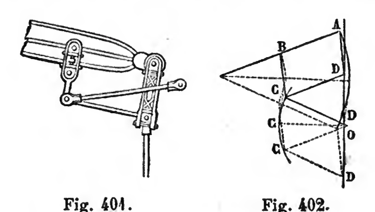


Fig. 401. Fig. 402.

faisant passer une circonférence par les positions du sommet C du parallélogramme aux deux extrémités et au milieu de la course du piston (fig. 402), le point D restant en ligne droite. Le centre de ce cercle serait la position la plus convenable du point fixe.

503. L'étude de la courbe tracée par le sommet libre du parallélogramme offre quelque intérêt au point de vue géométrique. On la décrit facilement en donnant au point C toutes les positions qu'il peut prendre (même en retournant le parallélogramme). Cette courbe est encore la courbe en 8 dont nous avons déjà parlé ; la partie de celle-ci qui se confond sensiblement avec une ligne droite appartient à la tangente au point d'inflexion ; elle est par cette raison dite *courbe à longue inflexion.*

Cette courbe peut être définie géométriquement d'une manière plus simple que celle qui repose sur la considération du parallélogramme, car elle est la *ligne décrite par un point d'une droite mobile de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux circonférences fixes* ; c'est par un semblable mouvement que nous y avons été conduits précédemment.

En effet, si par le centre O (fig. 403) on mène une parallèle au côté

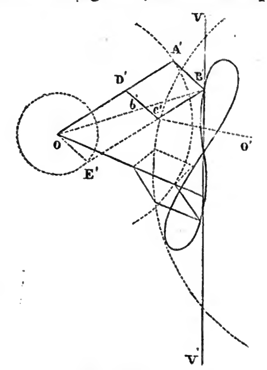


Fig. 403.

D′ C′, elle rencontrera le prolongement du côté B′ C′ en un point E′, et l'on aura O E′ = D′C′ = constante, et de même E′ C′ = O D′ = constante. Donc la droite C′ E′, de longueur constante, se meut de manière que ses extrémités glissent sur deux circonférences ayant leurs centres en O et O′ et pour rayons O′ E′, O′ C′. Le point B′ de la droite prolongée parcourt la courbe en question.

504. Le parallélogramme de Watt peut guider en ligne droite

deux tiges à la fois. En effet, la droite O B′ rencontre le côté D′ C′ en un point b' qui reste le même sur cette droite, quelle que soit la position du parallélogramme ; et ce point b' décrit une ligne semblable à celle décrite par le point B′, ces deux lignes ayant leur centre de similitude au point O. Il s'ensuit que la seconde approche d'une ligne droite de même que la première.

La démonstration est facile ; en effet, on a :

$$\frac{D'b'}{A'B'} = \frac{OD'}{OA'} \text{ ou } D'b' = \frac{OD' \times A'B'}{OA'} = \text{constante},$$

à cause de la similitude des triangles O D′ b', O A′ B.

On a de même $\frac{Ob'}{OB'} = \frac{OD'}{OA'} =$ constante ; les deux courbes sont donc semblables.

505. Puisque les points C′ et E′ se meuvent sur deux circonférences, il suffira de lier (fig. 404) ces points aux rayons des deux cercles par des articulations, on peut supprimer les côtés A′ D′, A′ B′, B′ C′ du parallélogramme et les remplacer par le rayon O E′ qui devient le balancier. Le mécanisme ayant moins de solidité, il faut rapprocher le point B′ du balancier O E′.

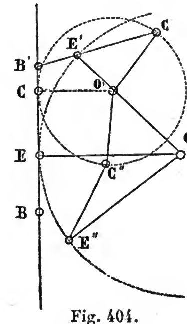


Fig. 404.

La fig. 404 représente cette disposition, qui est sensiblement celle dont nous sommes partis d'abord. Le balancier OE′, auquel est imprimé le mouvement circulaire alternatif, porte à son extrémité E′ une pièce E′ B′ pouvant tourner librement autour du point E′. Le point B′ est destiné à parcourir la verticale B′ B″. On place ce point dans ses deux positions extrêmes et sa position intermédiaire, et l'on prend les trois positions correspondantes d'un point C′ de la pièce E′ B′. Par ces trois positions du point C′, on fait passer une circonférence dont le centre est en O′, et on assujettit C′ à se mouvoir sur celle-ci en l'assemblant avec un de ses rayons.

506. Un autre système, dû à la combinaison d'un guide plan et

d'une articulation, a été quelquefois employé. Bien qu'il soit défectueux au point de vue de la solidité de la construction, nous l'indiquerons sommairement; c'est le parallélogramme d'Olivier Évans (fig. 405).

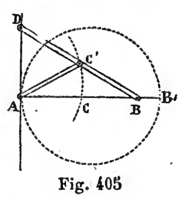


Fig. 405

Soit B D une barre assemblée à l'extrémité D avec une tige AD qui doit se mouvoir en ligne droite, et dont l'extrémité B peut se mouvoir horizontalement sur la ligne AB'.

Une barre A C', dont la longueur est égale à la moitié de BD, peut tourner autour d'un point fixe A et est assemblée à charnière avec le milieu C' de B D; menons la ligne A D perpendiculaire à AB'.

Quelle que soit la position du point C' *sur l'arc de cercle* CC', *l'angle* DAB *est toujours droit.*

En effet, les trois points D, A, B étant situés à égale distance du point C', appartiennent à une circonférence décrite du point C' comme centre avec C' B pour rayon. Les deux points B et D' étant les extrémités d'un même diamètre, l'angle inscrit DAB est droit.

Le point D se trouvant constamment sur la perpendiculaire A D élevée sur A B, se meut en ligne droite.

On voit donc que B D étant un balancier, le point D se meut en ligne droite s'il est porté par une tige articulée autour d'un point fixe A, et si les coussinets de l'axe placé en B sont assujettis à se mouvoir dans une glissière. Comme le mouvement rectiligne du point B est peu étendu dans le cas des machines à vapeur, on le remplace par un petit arc de cercle décrit par un support qui porte les coussinets de B, et qui oscille autour d'une articulation placée à sa partie inférieure.

TABLE DES MATIÈRES.

II. MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU.

III. MOUVEMENT RECTILIGNE CONTINU EN RECTILIGNE CONTINU.

MOUVEMENTS CONTINUS EN MOUVEMENTS ALTERNATIFS.

IV. MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN CIRCULAIRE ALTERNATIF.

V. MOUVEMENT CIRCULAIRE CONTINU EN RECTILIGNE ALTERNATIF.

EXCENTRIQUES POUR MOUVEMENT CIRCULAIRE.

Imprimerie de Gustave GRATIOT, 11, rue de la Monnaie.

